Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

2020 Monika Kaprasová

Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Mascheroniho konstrukce

Mascheroni Constructions

Monika Kaprasová

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Antonín Jančařík, Ph.D.

Studijní program: Specializace v pedagogice

Studijní obor: Matematika

Praha 2020

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma Mascheroniho konstrukce vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 13. 7. 2020 …………………….

Monika Kaprasová

Poděkování

Ráda bych poděkovala své původní vedoucí práce Mgr. Marii Holíkové, Ph.D. za pomoc při výběru tématu své bakalářské práce a vytyčený směr. Dále bych velice ráda poděkovala vedoucímu své práce doc. RNDr. Antonínu Jančaříkovi, Ph.D. za jeho trpělivost, ochotu, cenné rady a připomínky. Velmi si vážím času, který mi věnoval. A děkuji své rodině za neutuchající podporu, které se mi od ní během celého studia dostávalo.

Název práce: Mascheroniho konstrukce

Autor: Monika Kaprasová

Katedra: Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Antonín Jančařík, Ph.D.

Anotace: Tato bakalářská práce má za cíl představit základní poznatky o konstrukcích kružítkem, předvést řešení několika úloh podle jejich zakladatele – Lorenza Mascheroniho, motivovat čtenáře k vlastnímu zkoumání a pomoci učitelům při zpestřování výuky geometrie.

Klíčová slova: Mascheroniho konstrukce, Mohr-Mascheroniho konstrukce, konstrukce za pomoci kružítka, Mascheroniho věta

Title: Mascheroni Constructions

Author: Monika Kaprasová

Department: Department of Mathematics and Mathematical Education

Supervisor: doc. RNDr. Antonín Jančařík, Ph.D.

Annotation: This Bachelor's thesis intends to present basic knowledge about constructions with a compass, it shows solutions of some of these constructions which are made by their founder – Lorenzo Mascheroni, this thesis also should motivate readers to their own exploring and help teachers in making geometry classes more interesting.

Keywords: Mascheroni constructions, Mohr-Mascheroni constructions, constructions using a compass, Mascheroni's theorem

Obsah

1 Úvod

Při výběru tématu své bakalářské práce jsem se řídila hlavně svým zájmem o geometrii a různé zajímavé konstrukční úlohy. Téma mi doporučila původní vedoucí mé práce – Mgr. Marie Holíková, Ph.D. Mascheroniho konstrukce jsou zatím ne velmi publikovaným tématem, většina zdrojů je proto také v angličtině, často jej ostatní geometři a matematici přehlížejí, protože podává „jen“ další možnosti a nástroje, jak provést dosud známé konstrukce jinak, v tomto případě pouze za pomoci kružítka, a v co nejméně krocích. To je však dle mého názoru to, oč bychom se měli při výuce geometrie snažit. Proto mě toto téma nadchlo a za cíl své práce jsem si určila podat ucelený přehled o Mascheroniho konstrukcích a najít další zajímavé způsoby a cesty, jak sestrojit dosud známé konstrukční úlohy s využitím právě pouze kružítka.

V první části své bakalářské práce se ohlédnu do minulosti, představím další matematiky, kteří byli Mascheroniho předchůdci, a ukáži vývoj konstrukcí pouze za pomoci kružítka. Také zde stanovým základní pojmy a definice, z kterých budu vycházet v dalších částech. Ukáži alespoň základ důkazu věty, že každá Eukleidovská konstrukce je zároveň Mascheroniho.

V další části své bakalářské práce se zaměřím na tři nejslavnější Mascheroniho konstrukční problémy a dva méně známé, předvedu jejich řešení a konstrukci. Dále pro porovnání u některých příkladů uvedu řešení i Mascheroniho nástupců, kteří se pokusili přijít s elegantnějším řešením s méně kroky vedoucími ke stejnému výsledku.

V poslední části své bakalářské práce předvedu sérii několika úloh, které ukázkově vyřeším právě pomocí Mascheroniho konstrukcí, tedy pouze s použitím kružítka. Zároveň se budu snažit uvést vždy co nejmenší počet řešení, což porovnám s ostatními řešiteli. Přeji si, aby byla tato práce srozumitelná a přístupná každému, kdo o toto téma projeví zájem, proto se budu snažit důkazy vždy vystavět co nejjednodušeji a nejsrozumitelněji.

Doufám, že tato práce přinese každému čtenáři základní přehled o Mascheroniho konstrukcích, že ho podnítí k vlastnímu zkoumání a vzbudí jeho zájem a že bude využitelná i pro učitele jako nástroj při výuce.

2 Eukleidovské konstrukce

Nejprve se v této práci budu věnovat Eukleidovským konstrukcím. Jak již z názvu vyplývá, jsou tyto konstrukce spojeny hlavně se jménem Eukleida z Alexandrie, který je považován za jednoho z vůbec největších matematiků a za zakladatele geometrie jako takové. Žil zhruba v letech 325-260 př.n.l.. Většinu života strávil pravděpodobně v Alexandrii, kde mezi jeho žáky patřil i Archimédes. Nejdůležitějším Eukleidovým dílem pro geometrii jsou **Základy** [11] – sbírka třinácti knih, kde mimo jiné stanoví základních deset postulátů a axiomů geometrie.

Právě pomocí třech z těchto postulátů definujeme pojem Eukleidovská konstrukce. Těmito postuláty jsou [5]:

1. Sestrojení úsečky, která spojuje dva dané body.
2. Danou úsečku lze na obou stranách libovolně prodloužit.
3. Sestrojení kružnice o daném středu tak, aby procházela zvoleným bodem.

Pro Eukleidovské konstrukce si nejprve musíme vymezit pojem **základní křivka**. Základní křivkou rozumíme v Eukleidovské geometrii přímku, kružnici a dvojice přímek. Obecně lze však říci, že základními křivkami jsou pouze přímka a kružnice, uvážíme-li, že každou Eukleidovskou konstrukci lze provést kombinací těchto dvou křivek. [5]

Pro tyto konstrukce si tak vystačíme pouze s kružítkem a pravítkem [6].

Pravítko – je libovolná rovná hrana, která není nijak označená; neslouží tedy ke změření délky, ale pouze k propojení dvou sestrojených bodů, k prodloužení přímky nebo úsečky. Teoreticky předpokládáme, že má nekonečnou délku.

Kružítko – klasický nástroj, který nám pomocí rozevíratelných ramen umožňuje narýsovat kružnici o libovolném poloměru (tím je zde vzdálenost dvou sestrojených bodů). Za poloměr se považuje pouze vzdálenost dvou sestrojených bodů. V dřívějších dobách používali dokonce kružítko, které nebylo posuvné, tedy mělo stálý poloměr, který nebylo možné změnit – to nazýváme **pevným kružítkem** [5]. V této práci budu takové kružítko při některých konstrukcích taktéž využívat.

Pod pojmem sestrojení geometrického útvaru (=základní křivky) rozumíme určitý způsob, kterým lze přesně popsat a vymezit danou konstrukci pomocí několika úmluv [5].

Definice 1. *Geometrický útvar (=množina bodů) pokládáme za sestrojený (nebo říkáme, že jej lze sestrojit), pokud je sestrojený každý jeho bod.*

Definice 2. *Bod pokládáme za sestrojený, jestliže vyhovuje alespoň jedné z těchto úmluv:*

a) náleží do konečné množiny bodů, o nichž je řečeno, že jsou libovolně zvolené a různé;
b) je libovolně zvoleným bodem na sestrojené základní křivce nebo mimo ni;
c) je společným bodem dvou sestrojených základních křivek;
d) je libovolně zvoleným bodem ležícím mezi dvěma sestrojenými body.

Definice 3. *Kružnici považujeme za sestrojenou, jestliže platí Definice 1., Definice 2.(b), její střed je sestrojeným bodem a jestliže je její poloměr dán dvojicí různých sestrojených bodů. Říkáme, že přímku lze sestrojit, platí-li Definice 2.(a),(b),(c) a jsou-li sestrojené dva body, které ji určují.*

Jak již bylo řečeno výše, Eukleidovskými konstrukcemi rozumíme takové konstrukce, které lze sestrojit pomocí kružítka a pravítka, tedy takové, které se sestávají z kružnic a přímek. Pokud vypustíme všechny kružnice až na jedinou a ponecháme všechny přímky, nazveme tyto konstrukce **Steinerovými.** Konstrukce, ve kterých využíváme pouze kružnice, nazveme **Mascheroniovými** [6]. Pomocí takových konstrukcí samozřejmě nemůžeme sestrojit každý geometrický útvar, např. přímku, dle Definice 2.(d) však budeme takový útvar považovat za sestrojený.

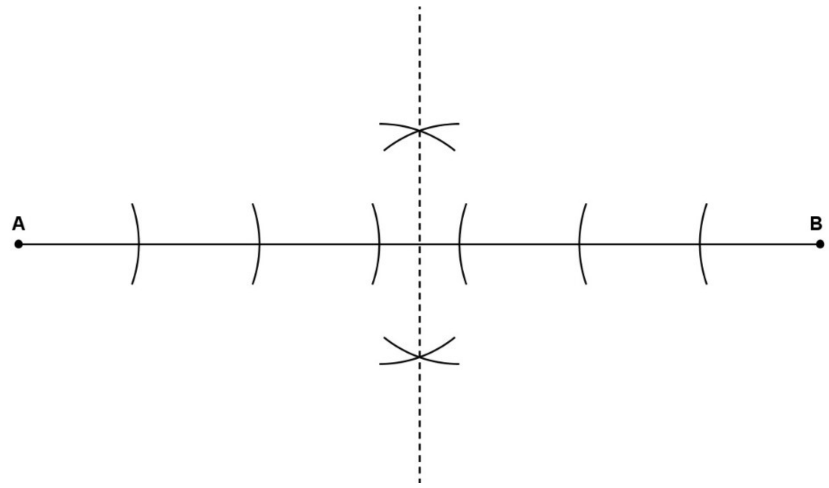
3 Mascheroniho konstrukce

3.1 Počátky

Počátky konstrukce geometrických útvarů pomocí kružítka a pravítka sahají až do starověkého Řecka, kde vznikaly první školy a kde se rozvíjelo zkoumání geometrie jako vědy. Do té doby se geometrické konstrukce využívaly především ve stavebnictví a zemědělství k praktickým účelům. Tehdejšími průkopníky byli např. Thales z Milétu, Pythagoras ze Samu, Platon nebo Eukleidés. Tito i ostatní vědci ze starověkého Řecka položili základy matematiky takové, jak ji známe dnes, včetně ustanovení základních definic a postulátů. Z této doby pochází i série nevyřešených problémů, které známe jako Tři klasické problémy antické matematiky – trisekce úhlu (rozdělení libovolného úhlu na tři shodné části), kvadratura kruhu (sestrojení čtverce o stejném obsahu, jako má zadaný kruh) a duplikace krychle (také zdvojení krychle, sestrojení hrany krychle, která má dvojnásobný objem než krychle daná)Je dokázáno, že ani jeden z těchto problémů nelze v eukleidovské geometrii vyřešit [12].

V pozdějších staletích se konstrukce geometrických útvarů dále vyvíjejí a s tím, jak začíná být geometrie jasnější, se začíná objevovat i snaha o nalezení elegantnějších řešení již známých konstrukcí, při kterých bude třeba použít méně nástrojů a samozřejmě i menší počet kroků. První taková systematická snaha se objevuje v 10. století v Persii, kde matematik **Abul Wefa** popsal konstrukce pomocí pravítka a takzvaného pevného kružítka, které neměnilo své rozpětí, a bylo tedy možné rýsovat pouze kružnice o témže poloměru. Důkazy správnosti některých jeho konstrukcí jsou však náročné, ačkoli geniální, proto je zde nebudu uvádět.[3].

Pevné kružítko se však objevuje v konstrukcích i v pozdějších letech. Pro představu zde uvedu dvě takové konstrukce pomocí pevného kružítka. První z nich bude jednoduchá konstrukce středu úsečky o libovolné délce. Pokud je úsečka delší než poloměr kružítka, postupným vynášením poloměrů ji zkracujeme do bodu, kdy se nám kružnicové oblouky protnou. Poté tyto průsečíky spojíme, čímž nám vznikne střed úsečky. Stále však v této konstrukci využíváme přímek.

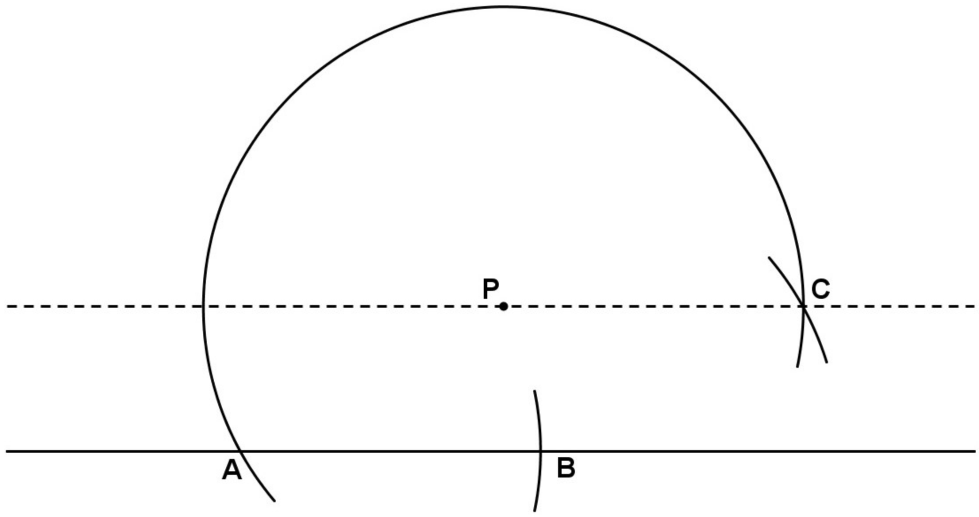


Obrázek 1: Sestrojení středu úsečky

Druhou konstrukcí bude sestrojení rovnoběžné přímky libovolným bodem P. Nejprve sestrojíme kružnici se středem v bodě P, která nám protne danou přímku v bodě A. V tomto bodě sestrojíme další kružnici, jenž protne danou přímku v bodě B. Následně zabodneme kružítko do bodu B, kružnicový oblouk protne první kružnici v bodě C. Tento bod společně s bodem P jednoznačně určuje rovnoběžnou přímku s přímkou zadanou [3].

Důkaz.

Důkaz je zjevný: $AP \parallel BC, |AP| = |BC| \Rightarrow AB \parallel PC$.



Obrázek 2: Sestrojení rovnoběžné přímky

Tato metoda sahá až do roku 1574, ale v průběhu historie je stále znovuobjevovaná a považována za novou [3].

Dalšími, kteří experimentovali s pevným kružítkem, byli renesanční matematici, jako například i **Leonardo da Vinci** [3].

Výjimečné pojednání o konstrukcích za pomoci pravítka a pevného kružítka však pochází až z roku 1673, kdy dánský geometr Georg Mohr vydává nejprve anonymně v Amsterodamu dílo **Compendium Euclidis Curiosi**, které jako první přeložil anglický hydrograf Joseph Moxon. V roce 1694 publikuje Angličan William Leybourn knihu nazvanou **Pleasure with Profit**, kde uvádí konstrukce pomocí pevného kružítka jako formu matematické hry [3].

V 19. století francouzský matematik Jean Victor Poncelet vydává tvrzení o tom, že každá geometrická konstrukce sestrojitelná pomocí kružítka a neoznačeného pravítka je uskutečnitelná pouze s pevným kružítkem a pravítkem. Později toto tvrzení pevně stanoví Švýcar Jacob Steiner. Tento závěr vyplývá z jejich zajímavé ukázky, že každá konstrukce pomocí kružítka a pravítka je též sestrojitelná pouze pravítkem, pokud je v rovině dána kružnice a její střed – takové kružnici se pak podle jejích objevitelů říká **Poncelet-Steinerova kružnice**. Později ve 2O. století bylo dokázáno, že ani tato kružnice není potřeba, stačí pouze libovolně malý kružnicový oblouk spolu se středem původní kružnice [3].

Mnoho matematiků poté zkoumalo konstrukce pomocí pravítka v různých obměnách.

Svět geometrie však obohatil v roce 1797 až Lorenzo Mascheroni, italský geometr, který ve svém díle **La Geometria del compasso** dokázal, že každou konstrukci pomocí kružítka a pravítka lze provést pouze pohyblivým kružítkem. Samozřejmě až na rovné linie, jako je přímka nebo úsečka, které ale považujeme za sestrojené, pokud jsou sestrojené jako průsečíky dvou kružnicových oblouků alespoň dva jejich body. Jak se později (1928) zjistilo, to samé již v roce 1672 dokázal Mohr ve svém díle **Euclides Danicus**, které bylo znovuobjeveno dánským studentem v antikvariátu [3].

3.2 Lorenzo Mascheroni

Narodil se roku 1750 rodině bohatého sedláka v Bergamu (Itálie). Původní záměr byl, že se stane knězem, na kterého byl také ve svých 17 letech vysvěcen, od roku 1778 však začíná učit, a to nejprve rétoriku, následuje fyzika a matematika. Roku 1786 se stává profesorem na univerzitě v Pavii, kde vyučuje algebru a geometrii. Později zde dosáhne na post rektora univerzity. Jedním z jeho prvních úspěchů byl výpočet Eulerova čísla na 32 desetinných míst, které publikoval v díle **Adnotationes ad calculum integrale Euleri** roku 1790. Jak již bylo řečeno výše, nejdůležitějším dílem se stala roku 1797 kniha **La Geometria del compasso**, ve které publikoval své nejznámější tvrzení o konstrukcích pomocí kružítka. Za svůj přínos získal Mascheroni i spoustu čestných ocenění a ve své době byl velice uznávaným [13].

3.3 Georg Mohr

Narodil se roku 1640 v Copenhagenu (Dánsko). Ačkoli byl jeho otec obchodníkem, byl Mohr vychováván právě ke studiu matematiky. Roku 1662 tak vyráží na studia matematiky, nejprve do Nizozemska, následně do Francie, Anglie, ale nakonec se vrací zpět do rodného Dánska. Ve své době nebyl příliš známý, a to také proto, že se jeho kniha **Euclides Danicus** (1672) ztratila a svého uznání dosáhla až roku 1928, kdy byla znovuobjevena v antikvariátu a přeložena do němčiny. Právě v tomto díle Mohr dokazuje, že každá konstrukce sestrojitelná pomocí kružítka a pravítka je sestrojitelná pouze za pomoci kružítka. Jeho důkaz je tak o 125 let starší než Mascheroniho [14].

Otázkou zůstává, zda Mascheroni mohl při svém výzkumu narazit na Mohrův důkaz a zda se jím mohl inspirovat. Oba se ale vydávali jiným směrem, tudíž je pravděpodobné, že oba tyto poznatky vyvodili nezávisle na sobě. Jelikož se Mohrovo dílo objevilo až v pozdější době, většinu zásluh si připsal právě Mascheroni a jsou po něm tak konstrukce pomocí kružítka pojmenovány. Protože jsou však výsledky obou geometrů nezávislé, nazýváme je někdy **Mohr-Mascheroniho**.

3.4 Mascheroniho konstrukční problémy

Lorenzo Mascheroni přišel s pěti pozoruhodnými konstrukcemi, kterým se budu v této kapitole věnovat [3]. První tři jsou považovány za významnější, proto je uvádím odděleně.

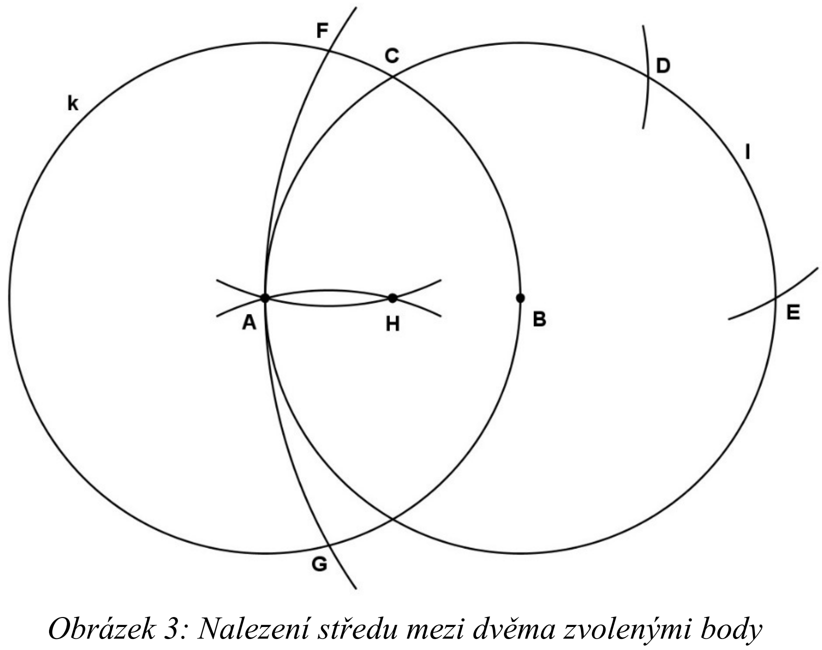
Některé z těchto konstrukcí lze sestrojit jednodušeji, neboli můžeme při nich použít menší počet kroků. Takovým řešením dám přednost před Mascheroniho.

Slavnými problémy, kterými se Mascheroni zabýval, bylo **nalezení středu mezi dvěma zvolenými body, nalezení středu zadané kružnice a tzv. Napoleonův problém**, který spočívá v nalezení vepsaného čtverce do zvolené kružnice. Dalšími dvěma zajímavými konstrukcemi jsou pak sestrojení čtverce, který je zadán jednou jeho stranou, nebo čtverce, který je zadán jednou jeho úhlopříčkou.

3.4.1 Problém – nalezení středu mezi dvěma zvolenými body

Řešení.

Nejprve narýsujeme dvě kružnice o poloměru AB, které budou mít středy v bodech A (kružnice k) a B (kružnice l). Jeden z těchto průsečíků označme C. Ponecháme v kružítku stejný poloměr a narýsujeme nejprve kružnici se středem v bodě C, průsečík této kružnice s kružnicí l označme D; poté se středem v bodě D, průsečík této kružnice s kružnicí l označme E. Bod E náleží polopřímce AB. Úsečka AE je dvojnásobkem úsečky AB. Vezmeme nyní do kružítka vzdálenost AE a sestrojíme kruhový oblouk se středem v bodě E. Ten nám protne kružnici k v bodech F a G. Nyní vezměme do kružítka vzdálenost AB a narýsujme dvě kružnice se středy v bodech F a G. Tyto oblouky se protnou v zadaném bodě A a v bodě H, který je hledaným středem mezi body A a B.



Obrázek 3: Nalezení středu mezi dvěma zvolenými body

Důkaz.

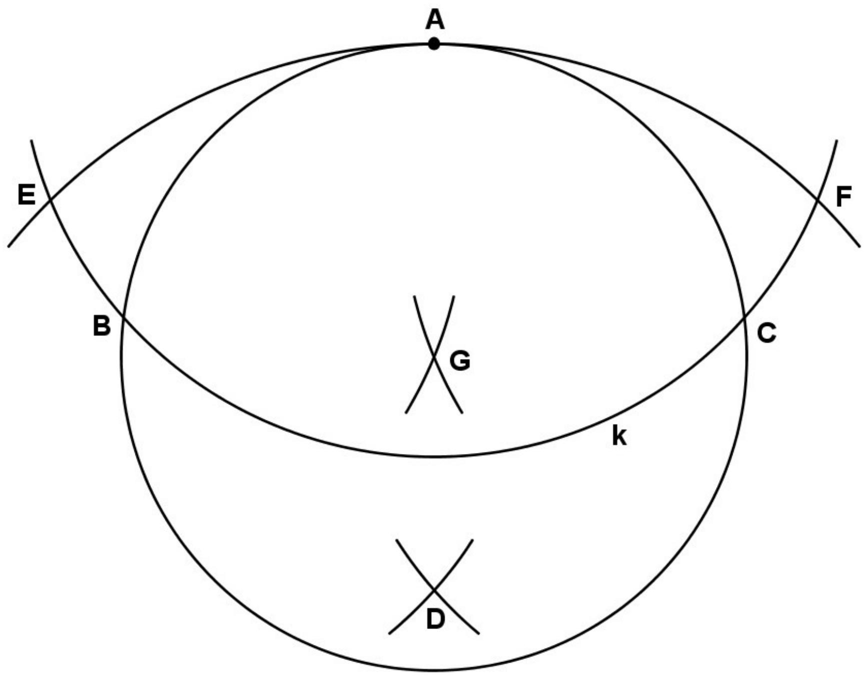
Důkaz můžeme provést pomocí dvou rovnoramenných trojúhelníků tvořených vrcholy AFH a AFE, které mají společný úhel FAE, a proto jsou shodné. Vzdálenost AF je polovinou AE, z toho vyplývá, že AH je tedy polovinou AB.

3.4.2 Problém – nalezení středu zadané kružnice

Mascheroniho řešení je příliš komplikované, nicméně v mnoha starších publikacích se objevuje snazší řešení neznámého autora, které zde uvedu.

Řešení.

Nechť A je jakýmkoli zvoleným bodem ležícím na zadané kružnici. Narýsujme nyní libovolný kružnicový oblouk se středem v bodě A (kružnice k), který nám protne zadanou kružnici ve dvou bodech – B a C. Vezměme do kružítka poloměr AB a sestrojme kružnice se středy v bodech B a C. Ty se protnou v bodě D. Nyní se středem v tomto bodě narýsujeme kružnici, která prochází bodem A a protne kružnici k v bodech E a F. Vezměme do kružítka poloměr AE a sestrojme dvě kružnice postupně se středy v bodech E a F. Ty se protnou uvnitř zadané kružnice v bodě G, který je zároveň jejím středem.



Obrázek 4: Nalezení středu zadané kružnice

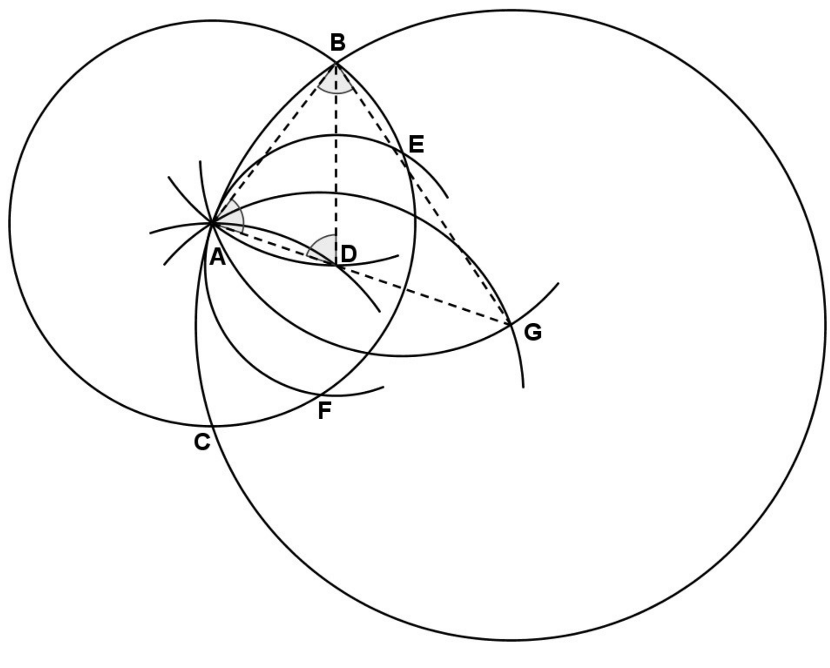
Důkaz.

Důkaz je obdobný jako u předchozího příkladu. Máme zde dva rovnoramenné trojúhelníky s vrcholy v bodech DEA a GEA, které mají společný úhel EAG, a proto jsou podobné. Také trojúhelníky AGB a ABD jsou jistě podobné, neboť mají společný úhel u vrcholu A a jsou rovnoramenné. Musí tedy platit: $AG:AB = AB:AD$. Předpokládejme nyní střed kružnice O. Trojúhelníky AOB a ABD jsou rovnoramenné se společným úhlem u vrcholu A, tedy jsou podobné. Obdobně tedy musí platit $AO:AB = AB:AD$. Aby zůstal poměr zachován, musí platit, že $AG = AO$, G je tedy středem zadané kružnice.

Uvedu zde ještě jeden zajímavý důkaz, a to s využitím kruhové inverze. Pro tento typ důkazu budu uvažovat stejný postup konstrukce, jako u předcházejícího, s tím rozdílem, že první narýsovaná kružnice má menší poloměr než zadaná. (Důkaz je však pro oba případy totožný, tento obrázek využívám pouze pro větší přehlednost.)

Definice. *Kruhová inverze určená kružnicí $k\ (S;\ r)$ je zobrazení roviny do téže roviny, které každému bodu $X \neq S$ přiřadí X' tímto způsobem:*

1. $X' \in \mapsto SX$,
2. $|SX| \cdot |SX'| = r^2$. [15]



Obrázek 5: Nalezení středu kružnice - kruhová inverze

Mějme tedy kruhovou inverzi určenou kružnicí se středem v bodě A. Budeme se snažit dokázat, že bod G je v této kruhové inverzi obrazem bodu A.

V obrázku vidíme dva rovnoramenné trojúhelníky: ADB a BAG. Úhel DAB je shodný s úhlem GAB, a protože jsou trojúhelníky rovnoramenné, musí se shodovat i s úhly ABG a ADB. Proto jsou tyto trojúhelníky podobné. Na základě podobnosti těchto trojúhelníků musí platit vztah:

$$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|AG|}.$$

Po úpravě (roznásobení rovnice jmenovateli) vyplývá:

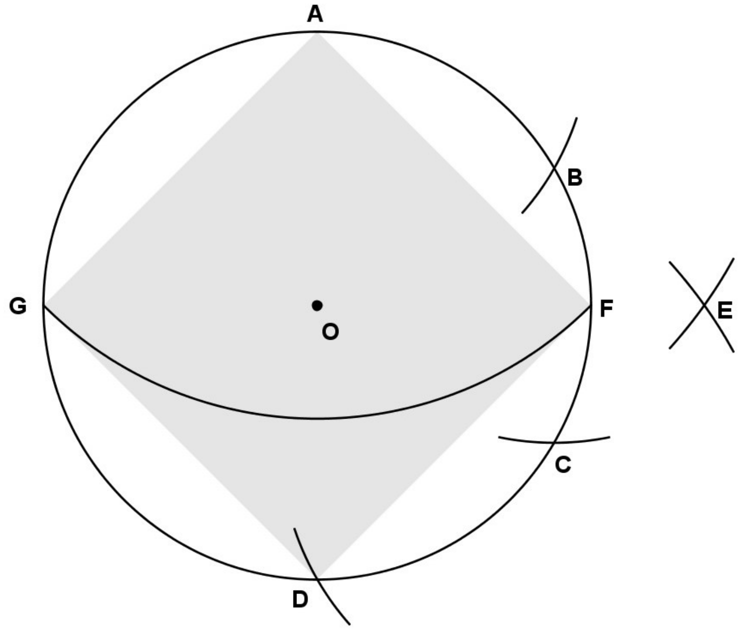
$$|AD| \cdot |AG| = |AB|^2 = r^2.$$

Proto je bod D inverzním k bodu G, který je středem hledané kružnice.

3.4.3 Problém – také znám jako Napoleonův problém – rozdělení kružnice s daným středem na čtyři shodné části neboli najít vrcholy vepsaného čtverce

Řešení.

Zvolme bod A náležící zadané kružnici se středem O. Vezmeme do kružítka poloměr zadané kružnice a zabodneme kružítko nejprve do bodu A, jeden průsečík obou kružnic ve zvoleném směru označíme B. Stejný postup opakujeme postupně se středy v bodech B a C, sestrojíme tak body C a D. Se středy v bodech A a D nyní sestrojme kružnice o poloměru AC, jejich průsečík vně kružnice označme E. Dále vezmeme do kružítka poloměr OE a zabodneme do bodu A. Vzniklá kružnice nám protne původní v bodech F a G. Body A, F, D a G tvoří vrcholy vepsaného čtverce [16].



Obrázek 6: Napoleonův problém

Důkaz.

Důkaz provedeme numericky. Označme r poloměr zadané kružnice. Z Euklidovy věty o odvěsně plyne:

$$|AC| = \sqrt{\frac{3}{2}r \cdot 2r} = r\sqrt{3} = |AE|.$$

Z Pythagorovy věty pak vyplývá:

$$|OE| = \sqrt{3r^2 - r^2} = r\sqrt{2} = |AF|.$$

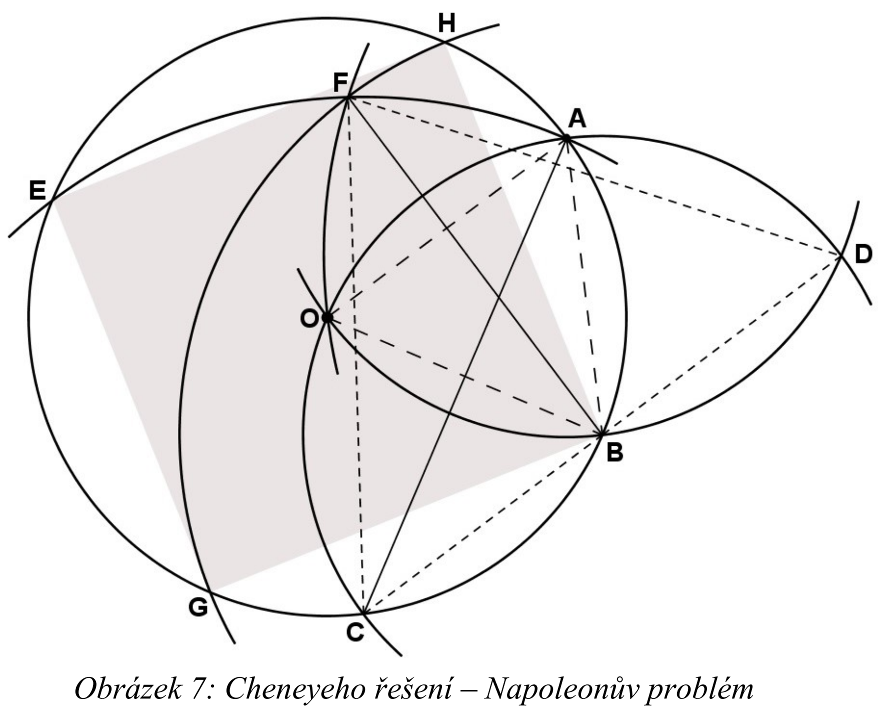
Body A, F, D, G tvoří vrcholy vepsaného čtverce.

Napoleon Bonaparte zadal tuto úlohu Mascheronimu, neboť byl fascinován geometrií, což mělo význam i pro jeho vojenské úspěchy. Ve své době velice obdivoval a podporoval francouzské matematiky. Jedním z jeho velice dobrých přátel byl i Gaspard Monge (otec deskriptivní geometrie). Zasloužil se také o rozvoj vzdělání v oblasti matematiky. Napoleon a Mascheroni se stali přáteli v roce 1796, kdy obsadil severní Itálii. O rok později Mascheroni publikuje své dílo o konstrukcích pouze kružítkem. Traduje se, že roku 1797 Napoleon předvedl Mascheroniho konstrukční řešení dvěma významným matematikům, kterými byli Joseph Louis Lagrange a Pierre Simon de Laplace (oba se řadí mezi nejvýznamnější matematiky vůbec, zvláště pak v oblasti matematické analýzy). Ti byli prý tak ohromeni, že prohlásili:

„*Generále, čekali jsme od Vás vše kromě lekce v geometrii.*“ [3]

Napoleonův problém později vyřešil i jistý Fitch Cheney, který přišel z řešením zahrnujícím pouze pět kroků namísto Mascheroniho šesti.

Cheneyeho řešení. [17]
Zvolme bod *A* na dané kružnici se středem v bodě *O*. Nejprve sestrojíme kružnici se středem v bodě *A*, která bude procházet bodem *O*. Jeden z průsečíků obou kružnic označme *B*. Dále sestrojíme kružnici se středem v tomto bodě, která bude procházet bodem *A*. Průsečík této a dané kružnice označíme *C*, průsečík s kružnicí, kterou jsme sestrojili v předchozím kroku, označíme *D*. Nyní sestrojíme kružnici se středem v bodě *C* procházející bodem *A*, která nám protne danou kružnici v bodě *E*. Dále sestrojíme kružnici se středem v bodě *D*, která prochází bodem *O*. Průsečík s předchozí kružnicí označme *F*. Nakonec sestrojíme kružnici se středem v bodě *B* procházející bodem *F*. Průsečíky s danou kružnicí označíme *G*, *H*. Body *B, H, E, G* tvoří vrcholy vepsaného čtverce.



Obrázek 7: Cheneyeho řešení – Napoleonův problém

Důkaz.

Důkaz vedeme dvěma směry. Nejprve bod E, ten leží na přímce OB, úsečka BE tedy tvoří úhlopříčku hledaného čtverce. Pokud označíme poloměr kružnice r, platí, že:

$$|BE| = 2r.$$

Dále budeme vycházet z rovnoramenného trojúhelníku CDF, ve kterém platí:

$$|DF| = |OD| = |CF| = r\sqrt{3},$$

to plyne například z toho, že AC je dvojnásobkem výšky rovnostranného trojúhelníku AOB o straně délky r. V trojúhelníku CDF je úsečka BF výškou, kterou tedy z Pythagorovy věty můžeme vypočíst následovně:

$$|BF| = \sqrt{|DF|^2 - |BD|^2} = \sqrt{3r^2 - r^2} = r\sqrt{2} = |BH| = |BG|.$$

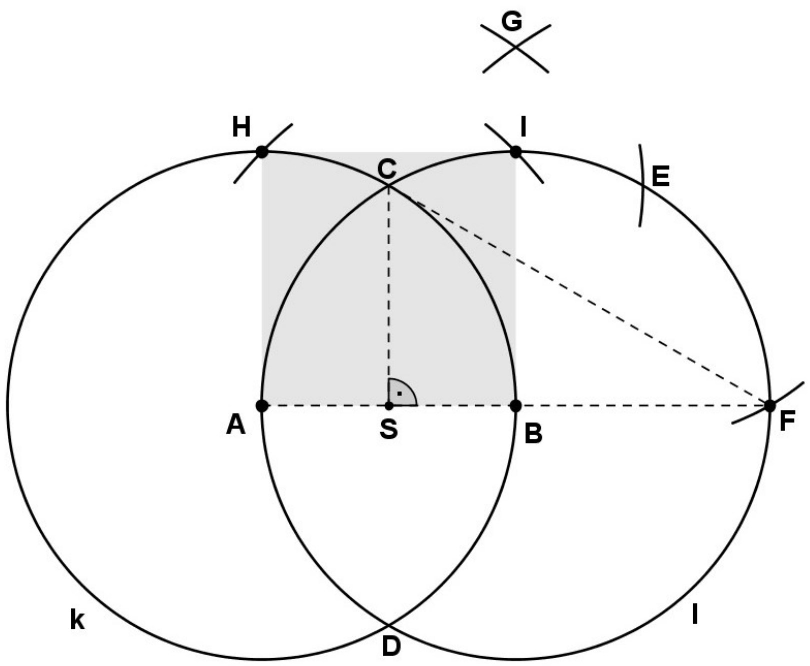
Pokud tedy toto platí v trojúhelníku BHG a zároveň je přepona rovna $2r$, platí Pythagorova věta a tento trojúhelník je pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu B, a body G a H tvoří průměr kružnice (Thaletova věta). Jelikož bod E leží na přímce BO, je i trojúhelník EGH pravoúhlý a tedy body B, H, E, G tvoří čtverec.

3.5 Další Mascheroniho konstrukční problémy

3.5.1 Sestrojení čtverce, pokud je zadaná jedna jeho strana.

Řešení.

Nechť jsou dány body A, B, které tvoří jednu stranu čtverce. Nejprve sestrojíme kružnice se středy v bodech A (kružnice k) a B (kružnice l) a poloměrem AB, průsečíky těchto kružnic označme C, D. Dále sestrojíme kružnici se středem v bodě C o poloměru AB, průsečík s kružnicí l označme E, obdobně sestrojíme kružnici se středem v bodě E o poloměru AB a průsečík s kružnicí l označíme F. Nyní sestrojíme dvě kružnice se středy v bodech A a F o poloměru AE, jeden z jejich průsečíků označíme G. Nakonec vezmeme do kružítka vzdálenost BG a sestrojíme postupně dvě kružnice, se středem v bodě *B*, její průsečík s kružnicí *k* označíme *H*, se středem v bodě *A*, její průsečík s kružnicí *l* označíme *I*. Body *A, B, H, I* tvoří vrcholy hledaného čtverce.



Obrázek 8: Konstrukce čtverce o straně dané délky

Důkaz.

Označme S střed úsečky AB a r poloměr kružnice k a l, neboli velikost úsečky AB. Trojúhelník ABC je jistě rovnostranný, neboť délky jeho stran jsou poloměry kružnic k, l. Pak vzdálenost CS je rovna velikosti výšky tohoto trojúhelníku, tedy z Pythagorovy věty platí:

$$|CS| = \sqrt{|BC|^2 - \left(\frac{|AB|}{2}\right)^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}r.$$

Dále platí:

$$|CF| = \sqrt{|CS|^2 + |FS|^2} = \sqrt{\frac{3r^2}{4} + \frac{9r^2}{4}} = r\sqrt{3} = |FG|.$$

BG je výškou rovnoramenného trojúhelníku AFG, tedy:

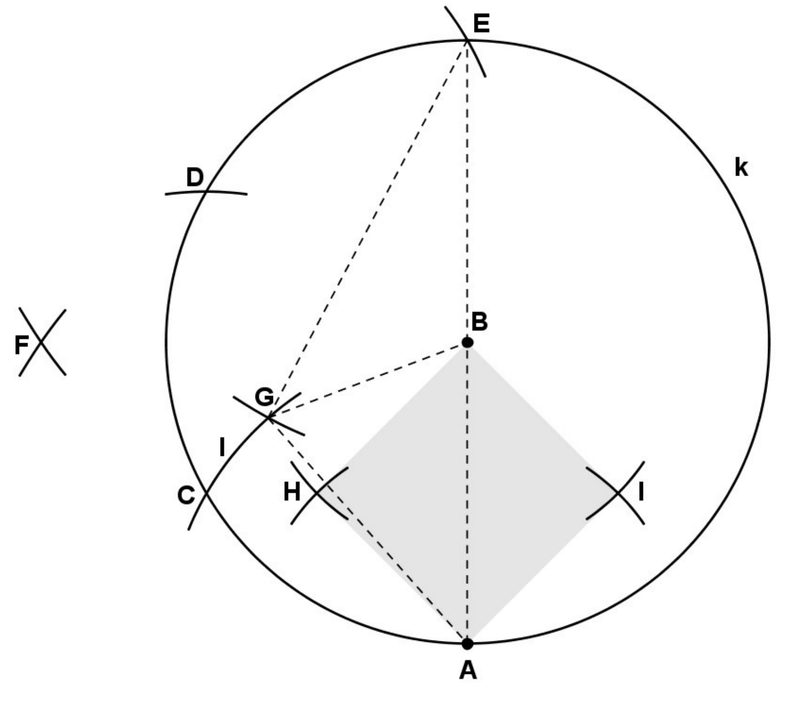
$$|BG| = \sqrt{|FG|^2 - |BF|^2} = \sqrt{3r^2 - r^2} = r\sqrt{2} = |BH| = |AI|,$$

čímž je dokázáno, že BH i AI mají skutečně velikost úhlopříčky čtverce. Navíc víme, že $|AB| = |AH| = |BI|$, tedy i $|HI| = |AB|$. ABIH je čtverec.

3.5.2 Nechť jsou v rovině dány dva body A a B. Nalezněte body C, D a sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby úsečka AB byla úhlopříčkou tohoto čtverce.

Řešení.

Nejprve sestrojíme výchozí kružnici k se středem v bodě B procházející bodem A. Dále na tuto kružnici vynášíme kruhové oblouky o poloměru AB postupně se středy v bodě A (kružnice l), průsečík označme C, poté se středem v bodě C, průsečík označme D, nakonec se středem v bodě D, průsečík označme E. V dalším kroku sestrojíme dvě kružnice se středy v bodech A a E o poloměru AD. Jeden jejich průsečíků označme F. Nyní vezmeme do kružítka poloměr BF a sestrojíme kružnici se středem v bodě F. Průsečík této kružnice s kružnicí l označme G. Nakonec sestrojíme dvě kružnice se středy v bodech A, B o poloměru BG. Jejich průsečíky označme H, I. Spolu s body A a B tvoří vrcholy hledaného čtverce, $AIBH$.



Obrázek 9: Konstrukce čtverce o úhlopříčce dané délky

Důkaz.

V tomto důkazu využijeme Apolloniovu větu, která má toto znění:

Definice. *Nechť je dán trojúhelník ABC, ve kterém pro délky stran platí:* $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|AC| = b$. *Dále nechť* t_c *je těžnice na stranu c. Pak platí:*

$$t_c = \sqrt{\frac{2b^2+2b^2-c^2}{4}}.$$

Označme $|AB| = a\sqrt{2}$. Trojúhelník AEC je pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu C (z Thaletovy věty). Platí:

$$|CE| = \sqrt{|AE|^2 - |AC|^2} = \sqrt{\left(2a\sqrt{2}\right)^2 - \left(a\sqrt{2}\right)^2} = a\sqrt{6} = |EF|.$$

Trojúhelník AEF je rovnoramenný s rameny $|AF| = |EF|$, pro délku výšky FB tak platí:

$$|FB| = \sqrt{|EF|^2 - |BE|^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{6}\right)^2 - \left(a\sqrt{2}\right)^2} = 2a = |GE|.$$

Nyní máme trojúhelník AEG, ve kterém známe délky všech stran, GB je těžnicí, z Apolloniovy věty tedy vyplývá:

$$|GB| = \sqrt{\frac{8a^2+4a^2-8a^2}{4} = a} = |BH| = |BI| = |AH| = |AI|.$$

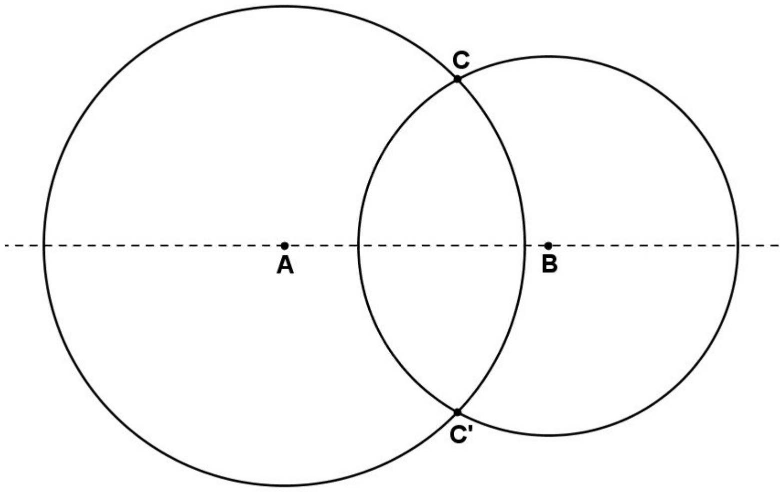
Navíc úhlopříčka *AB* splňuje Pythagorovu větu, tedy *AIBH* je čtverec.

3.6 Důležité konstrukce

3.6.1 Je dána úsečka AB a bod C, který na ní neleží. Sestrojte bod D tak, aby byl obrazem bodu C v osové souměrnosti podle přímky AB.

Řešení.

Nejprve sestrojíme kružnici se středem v bodě *A*, která prochází bodem *C*. Nyní sestrojíme kružnici se středem v bodě *B* opět tak, aby protínala bod *C*. Nově vzniklý průsečík označíme C'. Bod C' je obrazem bodu C v osové souměrnosti podle *AB*.



Obrázek 10: Osová souměrnost

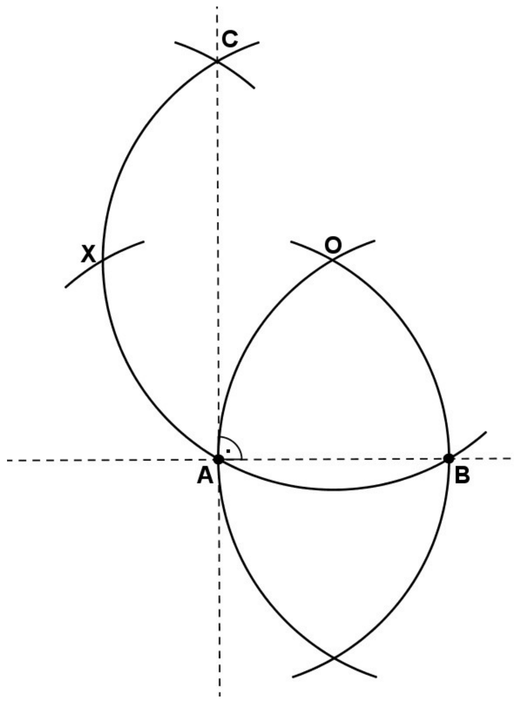
Důkaz.

$|AC| = |AC'|, |BC| = |BC'|$. Úsečka CC´ je kolmá na přímku AB. Bod C´ je tedy obrazem bodu C.

3.6.2 Je dána úsečka $\boldsymbol{AB}$. Najděte bod $\boldsymbol{C}$ tak, aby přímka $\boldsymbol{AC}$ byla kolmá na $\boldsymbol{AB}$.

Řešení.

Sestrojíme dvě kružnice postupně se středy v bodech A a B o poloměru rovném vzdálenosti bodů A a B. Jeden z průsečíků těchto kružnic označme O. Nyní vezmeme do kružítka stejný poloměr a sestrojíme kružnici se středem v bodě O. Dále postupně sestrojíme dva kruhové oblouky, které protnou tuto kružnici s opět stejným poloměrem, nejprve se středem v bodě A, průsečík označme X, poté se středem v bodě X, průsečík označme C. Přímka AC je kolmá na přímku AB.



Obrázek 11: Konstrukce kolmice v daném bodě

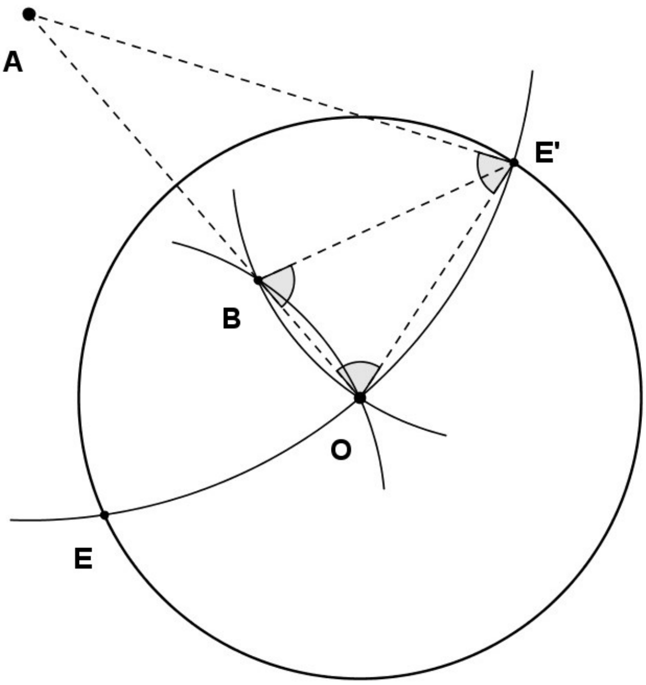
Důkaz.

Bod C je obrazem bodu B ve středově souměrnosti se středem O. Zároveň je obrazem bodu A v osové souměrnosti s osou danou body XO; XO je rovnoběžná s přímkou AB. Přímka AC je tedy kolmá na přímku AB.

3.6.3 Je dána libovolná kružnice se středem v bodě $\boldsymbol{O}$ a poloměrem $\boldsymbol{r}$. Zvolte bod $\boldsymbol{A}$ a zobrazte ho v této kruhové inverzi.

Řešení.

Nejprve sestrojíme kružnici se středem v bodě A procházející bodem O. Ta nám protne danou kružnici ve dvou bodech, E a E'. Nyní se středy v těchto bodech sestrojíme dvě kružnice procházející bodem O. Druhý z průsečíků označme B. Bod B je obrazem bodu A v této kruhové inverzi.



Obrázek 12: Kruhová inverze

Důkaz.

Jelikož body E a E' mají stejnou vzdálenost od bodu A, mají i stejnou vzdálenost od bodu B a O, tedy body A, B a O leží v jedné přímce. V této konstrukci vznikly dva rovnoramenné trojúhelníky: $OE'A$ a BOE'. Velikost úhlu AOE' je rovna velikosti úhlu BOE', proto jsou tyto trojúhelníky podobné a můžeme říct, že platí:

$$\frac{|AO|}{|OE'|} = \frac{|OE'|}{|BO|}.$$

Po roznásobení rovnice jmenovateli získáme tuto rovnost:

$$|AO| \cdot |BO| = |OE'|^2 = r^2,$$

což je definice kruhové inverze. Proto je bod B obrazem bodu A v této kruhové inverzi.

3.7 Mascheroniho tvrzení (někdy také Mascheroniho věta)

Věta 1. *Každou Eukleidovskou konstrukci, tedy konstrukci sestrojitelnou za pomoci pravítka a kružítka, lze sestrojit pouze kružítkem. Neboli každá Eukleidovská konstrukce je zároveň Mascheroniovská.* [5]

Zkusme se nyní podívat na důkaz této věty. Samozřejmě nemůžeme ukázat každou Eukleidovskou konstrukci, neboť takových konstrukcí je nekonečně mnoho. Můžeme však říci, že každá Mascheroniovská konstrukce vyhovuje *Definici 1, 2* a *3*. Problém nastává u bodu *c)*, *Definice 2*. Ten si nyní rozdělíme na tři případy [5]:

1. Bod pokládáme za sestrojený, jestliže náleží průsečíku dvou sestrojených kružnic.
2. Bod pokládáme za sestrojený, jestliže náleží průsečíku kružnice a přímky jednoznačně určené dvěma sestrojenými body.
3. Bod pokládáme za sestrojený, jestliže náleží průsečíku dvou přímek jednoznačně určených dvěma dvojicemi sestrojených bodů.

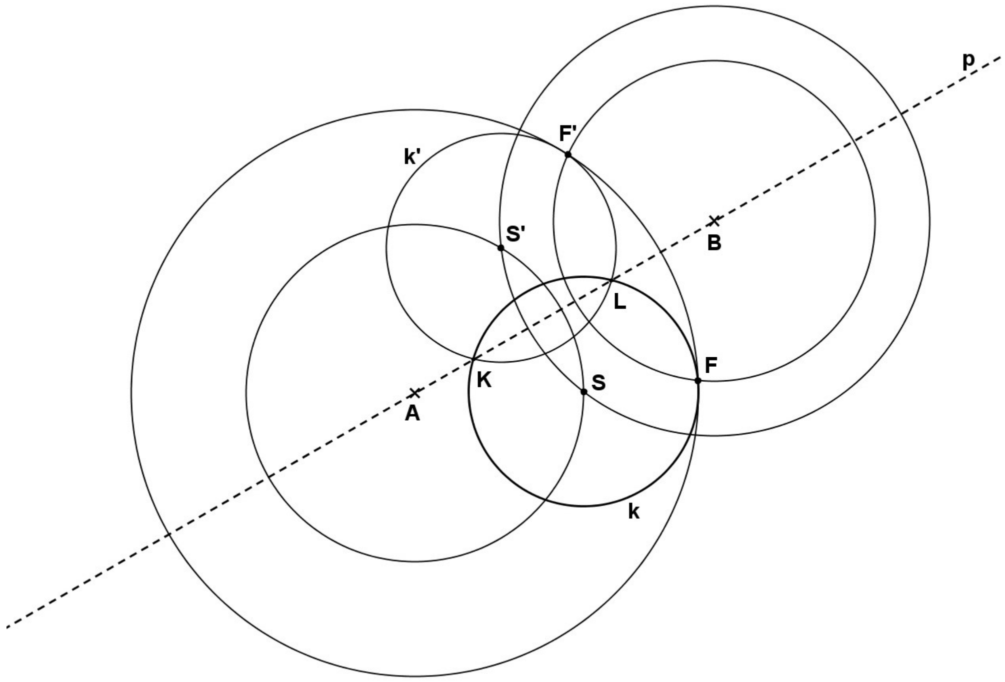
První bod je evidentní, takže se budeme zabývat jenom body dva a tři, přičemž bod dva si rozdělíme na dva případy: přímku máme určenou dvěma libovolnými body, přičemž ani jeden nesplývá se středem kružnice; a případ, kdy je přímka určená středem kružnice a libovolným bodem.

Nyní se můžeme vrhnout na již výše zmíněné důkazy toho, že bod můžeme pokládat za sestrojený za daných podmínek.

3.7.1 Bod je průsečíkem kružnice $\boldsymbol{k}$ se středem $\boldsymbol{S}$ a přímky $\boldsymbol{p}$, která je jednoznačně určená dvěma body – $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$.

Řešení.
Využijeme osové souměrnosti podle přímky p. Nejprve sestrojíme kružnici se středem v bodě A a poloměrem SA, dále pak kružnici se středem v bodě B a poloměrem SB. Průsečík těchto kružnic označme S'. Bod S' je obrazem bodu S v osové souměrnosti s osou p. Nyní zvolíme na původní kružnici k libovolný bod F. Podobně jako střed S, zobrazíme tento bod v osové souměrnosti s osou p – sestrojíme kružnici se středem v bodě

A procházející bodem *F*, dále pak sestrojíme kružnici se středem v bodě *B* procházející bodem *F*. Tyto kružnice se protnou právě v bodě *F*, druhý průsečík označme *F´*. Pokud nyní sestrojíme kružnici se středem v bodě *S´* procházející bodem *F´*, vznikne nám kružnice, která je obrazem kružnice *k* v osové souměrnosti s osou *p*. Označme ji *k´*. Průsečíky kružnic *k* a *k´* označme *K*, *L*. Tyto body jsou průsečíky přímky *p* s kružnicí *k*.



Obrázek 13: Průsečíky kružnice a přímky dané dvěma body

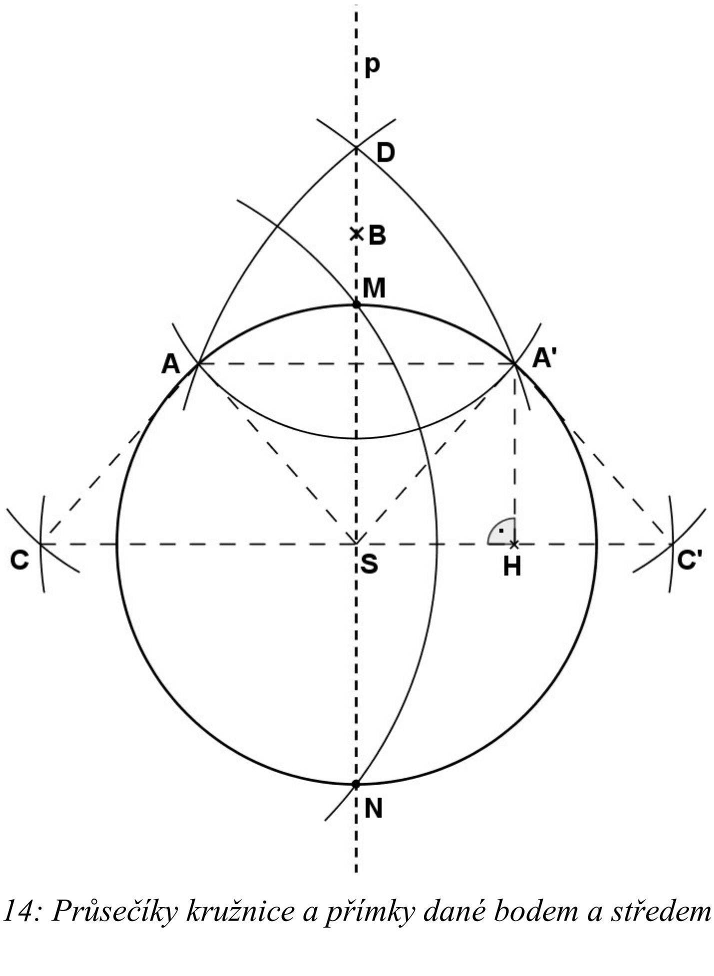
Důkaz.

Jak již bylo zmíněno na začátku, celá konstrukce je vlastně využitím osové souměrnosti podle přímky *AB*. Body *K*, *L* jsou pak v této souměrnosti samodružné, tedy leží na přímce *AB*.

3.7.2 Bod je průsečíkem kružnice k se středem S a přímky p, která prochází zároveň body B i S, $B \neq S$.

Řešení.

Nejprve sestrojíme kružnici se středem v bodě B tak, aby protnula danou kružnici ve dvou bodech, které označíme A, $A´$. Body A a $A´$ netvoří polokružnici. Dále sestrojme kružnice se středy v bodech A a $A´$ a poloměrem SA. V dalším kroku sestrojíme kružnici se středem v bodě S a poloměrem $AA´$, která nám tyto dvě kružnice protne v bodech C, $C´$. Se středy v těchto bodech opíšeme kružnice o poloměru $CA´$. Průsečík těchto kružnic označme D. Nakonec sestrojíme kružnici se středem v bodě C o poloměru SD. Vzniklé průsečíky s původní kružnicí jsou hledané průsečíky kružnice k a přímky p, označme M, N.



Obrázek 14: Průsečíky kružnice a přímky dané bodem a středem kružnice

Důkaz.

K důkazu využijeme lichoběžníku $CC'A'A$. Označme H střed úsečky SC'. Dvojitým použitím Pythagorovy věty pro trojúhelníky CHA' a SHA' dostáváme tuto rovnost:

$$|CA'|^2 = |CH|^2 + |HA'|^2 = |CH|^2 + |SA'|^2 - |SH|^2.$$

Označme dále $|SA| = |SA'| = r$, $|AA'| = |SC| = |SC'| = a$. Chceme tedy dokázat, že:

$$|CM|^2 = r^2 + a^2 \text{ (z trojúhelníku CSM).}$$

Víme, že platí:

$$|SH| = \frac{1}{2}a, |CH| = \frac{3}{2}a,$$

tedy že:

$$|CD|^2 = |CA'|^2 = r^2 + 2a^2,$$

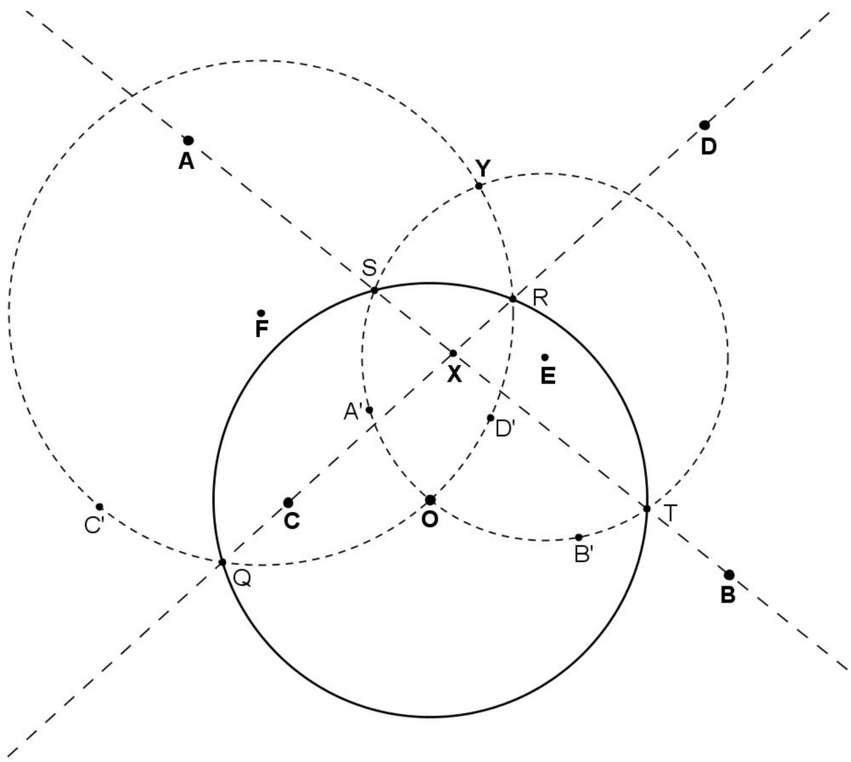
$$|SD|^2 = |CD|^2 - |CS|^2 = r^2 + 2a^2 - a^2 = r^2 + a^2.$$

Jelikož $|SD| = |CM|$, je konstrukce dokázána.

3.7.3 Je průsečíkem dvou různoběžných přímek p a q, které jsou jednoznačně určeny dvojicemi bodů AB a CD.

Řešení.

Tato konstrukce je nejnáročnější, při jejím řešení budeme využívat již dříve dokázané konstrukce obrazu bodu v kruhové inverzi a Mascheroniho nalezení středu dané kružnice. Mějme tedy v rovině body A, B, C, D. Nejprve sestrojíme kružnici se středem v bodě O, která bude mít libovolný poloměr. Bod O volíme tak, aby neležel na žádné z daných přímek. Dále zobrazíme body A, B, C i D v kruhové inverzi s kružnicí se středem v bodě O. Vzniknou nám tak obrazy těchto bodů A', B', C', D'. Přímka AB se tedy zobrazí na kružnici procházející body A' a B' a středem kružnice O, analogicky se přímka CD zobrazí na kružnici procházející body C' a D' a středem kružnice O. Dle Mascheroniho konstrukce sestrojíme středy těchto kružnic a označíme je E, F. Nyní sestrojíme kružnice se středy v těchto bodech tak, aby procházely bodem O. Kružnice se protnou právě v tomto bodě O, druhý průsečík obou kružnic označme Y. Nyní už zbývá jen sestrojit obraz bodu Y v kruhové inverzi s původní kružnicí se středem v bodě O. Vzniklý obraz označme X. Bod X je hledaným průsečíkem přímek AB a CD.



Obrázek 15: Průsečík přímek daných dvěma dvojicemi bodů

Důkaz.

Tato konstrukce značně využívala kruhové inverze – té využijeme i v tomto důkazu. Označme nejprve průsečíky řídící kružnice s kružnicemi procházejícími body $A'B'O$ a $C'D'O$ v tomto pořadí S, T, Q, R. V kruhové inverzi se body náležící průsečíku řídící kružnice se zobrazovanou přímkou zobrazí samy na sebe – neboli jsou samodružné. To vyplývá z definice kruhové inverze: $|SX| \cdot |SX'| = r^2$, pokud tedy bod X náleží řídící kružnici, platí: $|SX| = r$, pak $r \cdot |SX'| = r^2$, z toho $|SX'| = r$. Zároveň definice říká, že body X a X' leží v jedné přímce, neboli $X = X'$. Z toho plyne, že body Q, R náleží přímce CD, stejně tak i body S, T náleží přímce AB. Bod Y je průsečíkem kružnic inverzních k přímkám AB a CD, tedy je inverzním bodem k průsečíku obou původních přímek. Pokud ho tedy znovu zobrazíme ve stejné kruhové inverzi zpět na svůj původní vzor, bude tento obraz hledaným průsečíkem obou přímek, platí:

$$|OY| \cdot |OX| = |OQ|^2 = |OS|^2 = |OR|^2 = |OT|^2 = r^2.$$

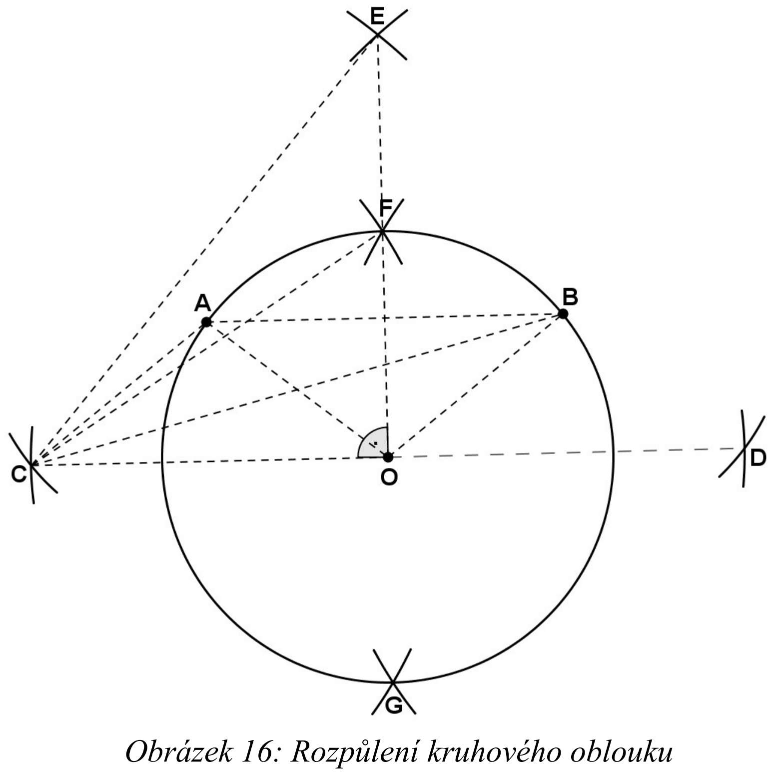
4 Příklady

V této části vzorově vyřeším některé Eukleidovské konstrukce za pomoci kružítka, navíc se pokusím vždy o takový postup, aby obsahoval co nejmenší počet kroků. Úlohy jsou vybrány tak, aby byly co nejrůznorodější, tedy aby přispěly k porozumění Mascheroniho tvrzení. Ke každé úloze proto připojím také důkaz.

4.1 Na kružnici se středem O leží body A a B. Rozdělte kruhový oblouk AB na polovinu.

Řešení.

Nejprve sestrojíme dvě kružnice se středy v bodech A a B procházející středem kružnice O. Dále sestrojíme kružnici se středem v bodě O o poloměru AB. Průsečíky těchto kružnic označme C, D. Nyní sestrojíme kružnici se středem v bodě C procházející bodem B, dále pak kružnici se středem v bodě D procházející bodem A. Průsečík těchto kružnic označme E. Nakonec sestrojíme dvě kružnice se středy v bodech C a D o poloměru OE. Průsečíky těchto kružnic, označíme F a G, leží zároveň na dané kružnici a jsou tak našimi hledanými body rozdělujícími kruhové oblouky na poloviny.



Obrázek 16: Rozpůlení kruhového oblouku

Důkaz.

Body $COBA$ a $ODBA$ tvoří dva rovnoběžníky. Dále víme, že body C, O a D leží na jedné přímce, stejně tak i body F, G a O. Navíc platí, že přímka CD je kolmá na přímku OF. Označme poloměr dané kružnice R. Pak stačí dokázat, že vzdálenost OF je rovna R, tedy bod F leží na dané kružnici. Algebraicky: v trojúhelnících COB a OBA z kosinové věty plynou dvě rovnosti:

$$|CB|^2 = |CO|^2 + |OB|^2 - 2 \cdot |CO| \cdot |OB| \cdot \cos|\sphericalangle COB|,$$
$$|OA|^2 = |OB|^2 + |AB|^2 - 2 \cdot |OB| \cdot |AB| \cdot \cos|\sphericalangle OBA|.$$

Body $ABOC$ tvoří vrcholy rovnoběžníku, v němž platí: $|CO| = |AB|$. Navíc pro vnitřní úhly platí: $|\sphericalangle OBA| = 180° - |\sphericalangle COB|$. Z toho dále také platí:

$$\cos|\sphericalangle OBA| = \cos(180° - |\sphericalangle COB|) = -\cos|\sphericalangle COB|.$$

Nyní oba tyto poznatky dosadíme do druhé rovnice:

$$|OA|^2 = |OB|^2 + |OC|^2 + 2 \cdot |OB| \cdot |OC| \cdot \cos|\sphericalangle COB|.$$

Sečtením těchto rovnic dostaneme:

$$|CB|^2 + |OA|^2 = 2 \cdot |OC|^2 + 2 \cdot |OB|^2.$$

Po dosazení R dostáváme:

$$|CB|^2 = 2 \cdot |OC|^2 + R^2.$$

Dále víme, že $|CB| = |CE|$, a protože trojúhelník COE je pravoúhlý, můžeme tento vztah dosadit do Pythagorovy věty a dostáváme:

$$|CB|^2 = |OC|^2 + |OE|^2,$$

opět dosadíme R a využijeme rovnosti $|CB|^2 = 2 \cdot |OC|^2 + R^2$, dostaneme:

$$|OE|^2 = |OC|^2 + R^2.$$

Trojúhelník COF je pravoúhlý, a tak zde platí Pythagorova věta:

$$|CF|^2 = |CO|^2 + |OF|^2.$$

Po dosazení $|CF| = |OE|$ a vyjádření dostáváme:

$$|OF|^2 = |OE|^2 - |OC|^2.$$

Dosadíme do této rovnice rovnost $|OE|^2 = |OC|^2 + R^2$ a získáme:

$$|OF|^2 = |OC|^2 + R^2 - |OC|^2, \text{ pak } |OF|^2 = R^2.$$

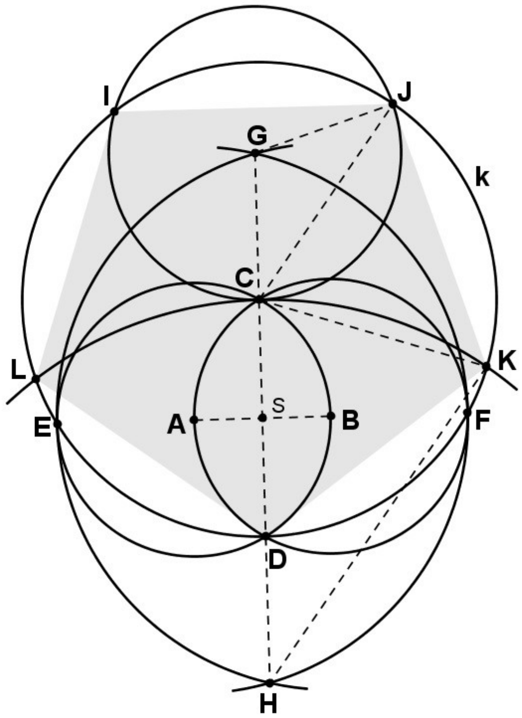
Protože velikost úsečky musí být kladné číslo a poloměr kružnice je rovněž větší než nulový, můžeme upravit na: $|OF| = R$. Čímž máme dokázáno.

4.2 Sestrojte pravidelný pětiúhelník, pokud:

a) má být libovolný,

Řešení.

Zadání vypadá velice jednoduše, avšak my máme k dispozici pouze kružítko, tudíž bude řešení vyžadovat trochu více úsilí. Nejprve sestrojíme libovolnou kružnici a její střed označíme *A*. Dále na této kružnici vyneseme bod *B*, který bude středem kružnice o stejném poloměru. Takto vzniklé kružnice se protnou v bodech C a *D*. Poté sestrojíme kružnici se středem v bodě C takovou, aby procházela bodem *D*, označme *k*. Tato kružnice k protne dvě původní kružnice v bodech, které si označíme E a *F*. Následně vyneseme dva kružnicové oblouky, jeden bude mít střed v bodě E a bude procházet bodem *F*, druhý pak opačně, tedy bude mít střed v bodě F a bude procházet bodem *E*. Tyto oblouky se protnou ve dvou bodech, označme je G a *H*. Bod G poté využijeme jako střed předposlední z kružnic, která bude procházet bodem *C*. Průsečíky této kružnice s kružnicí k označme *I*, *J*. Poslední kružnice pak bude mít střed v bodě H a bude rovněž procházet bodem *C*. Její průsečíky s kružnicí k označme *L*, *K*. Body *DKJIL* tvoří vrcholy pravidelného pětiúhelníku.



Obrázek 17: Konstrukce pravidelného pětiúhelníku

Důkaz.

Budeme se snažit dokázat, že pokud rozdělíme pětiúhelník na pět trojúhelníků s vrcholy v bodě C a se základnami na příslušných stranách, budou všechny shodné a u vrcholu C budou mít všechny úhly shodnou velikost, tedy $360°: 5 = 72°$. Pro ulehčení si zvolme $|AB| = 1$. Body ABC tvoří rovnostranný trojúhelník, ve kterém víme, že je výška rovna velikosti $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Z toho plyne, že $|CD| = \sqrt{3}$. Označme si nyní střed úsečky AB jako S. V pravoúhlém trojúhelníku AHS pak známe délky dvou stran, a to $|AS| = \frac{1}{2}$ a $|AH| = 2$. Snadno tak podle Pythagorovy věty dopočítáme i třetí stranu, a to následovně:

$$|HS| = \sqrt{|AH|^2 - |AS|^2} = \sqrt{4 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

$$|CH| = |HS| + |CS| = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{2}.$$

Trojúhelník CHK je rovnoramenný se základnou $|KC| = |CD| = \sqrt{3}$. Pomocí výšky na stranu KC si rozdělíme trojúhelník na dva pravoúhlé a dopočteme velikost úhlu KCH následovně:

$$\cos(\sphericalangle KCH) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{2}} \doteq 0{,}31 \Rightarrow |\sphericalangle KCH| = 72°.$$

Dále pak využijeme rovnoramenného trojúhelníku *CJG*, ve kterém platí:

$$|CG| = |GJ| = |DH| = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{2},$$

zároveň také:

$$|CJ| = |KC| = \sqrt{3}.$$

Opět za použití výšky tohoto trojúhelníku a funkce cosinus vypočítáme:

$$|\sphericalangle GCJ| = 36°,$$

$$|\sphericalangle ICJ| = 72°.$$

Body *G*, *C*, *H* leží na jedné přímce, pak platí:

$$|\sphericalangle JCK| = 180° - |\sphericalangle GCJ| - |\sphericalangle KCH| = 180° - 36° - 72° = 72°.$$

Totéž bude platit i pro zbylé úhly u vrcholu *C*, neboť jsou podle osy *GH* symetrické. Tedy:

$$|\sphericalangle DCL| = |\sphericalangle DCK| = 72°, |\sphericalangle ICL| = |\sphericalangle JCK| = 72°.$$

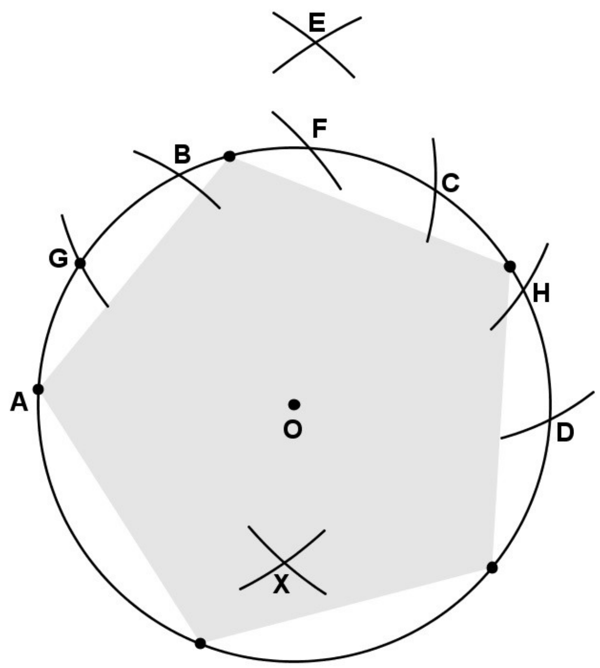
Body *DKJIL* tvoří pravidelný pětiúhelník.

b) je dána kružnice, do které má být vepsán.

Řešení.

Na dané kružnici se středem v bodě *O* zvolme libovolný bod *A*. Do kružítka vezmeme poloměr původní kružnice neboli vzdálenost *AO*. Zabodneme kružítko do bodu *A* a vyneseme tento poloměr na kružnicový oblouk v jednom směru. Vznikne nám tak jako průsečík bod *B*. Dále si ponecháme v kružítku stejnou vzdálenost, zabodneme do bodu *B* a vyneseme na původní kružnici další průsečík, který tentokrát pojmenujeme *C*.

Tento postup zopakujeme ještě jednou, zabodneme do bodu C, vyneseme daný poloměr a nový průsečík označíme *D*. Body A, D tvoří průměr dané kružnice. Nyní vezmeme do kružítka vzdálenost AC a postupně se středy v bodech A, D vyneseme dva kružnicové oblouky, které se protnou blíže bodu *B* v bodě *E*. Dále vyneseme na danou kružnici vzdálenost *OE* tak, aby byl střed v bodě *A*. Takto vzniklý průsečík označme *F*. Tento bod zároveň leží ve středu bodů *B*, *C*. Teď vezmeme do kružítka opět vzdálenost původní kružnice neboli *OF* a se středem v bodě *F* vyneseme na kružnici dva průsečíky, které po řadě pojmenujeme *G*, *H*. Nakonec vezmeme do kružítka vzdálenost *OE*, zabodneme postupně do bodů *G* a *H* a vyneseme dva kružnicové oblouky tak, aby ležely v opačné polorovině než *OE*. Takto vzniklý průsečík označíme *X*. Vzdálenost bodů *AX* je zároveň rovna délce strany vepsaného pravidelného pětiúhelníku.

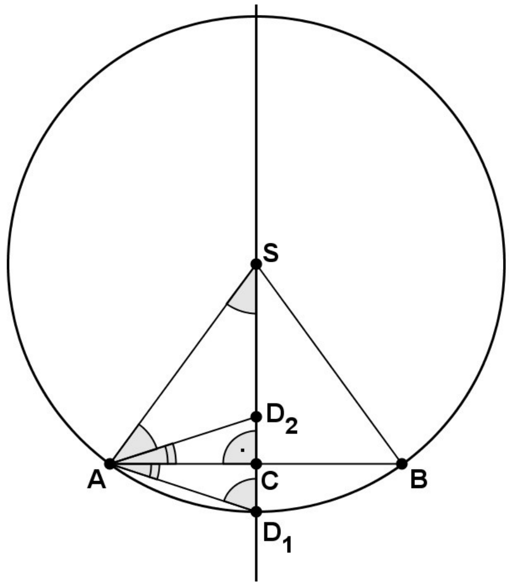


Obrázek 18: Konstrukce pravidelného vepsaného pětiúhelníku

Pomocný důkaz.

Nejprve odvodíme délku strany AB pravidelného pětiúhelníku vepsaného do kružnice se středem S a poloměrem *r*. Střed úsečky AB označme C. Přímka SC nám blíže bodu C protne zadanou kružnici v bodě D_1. Úsečka SD_1 tvoří poloměr kružnice a je kolmá na AB. Bod D_2 je obrazem bodu D_1 v osové souměrnosti s osou AB, zároveň je úsečka AD_1

délkou strany pravidelného desetiúhelníku vepsaného do kružnice, označíme ji a_{10}.



Obrázek 19: Délka strany vepsaného pětiúhelníku

Trojúhelník AD_1C je shodný s trojúhelníkem ACD_2. Dále víme, že platí:

$$|\sphericalangle ASC| = 36°, |\sphericalangle AD_1S| = 72°, |\sphericalangle SAC| = 54°.$$

Z toho vyplývá, že

$$|\sphericalangle SAD_1| = 72°, |\sphericalangle D_2AC| = |\sphericalangle CAD_1| = 18°, |\sphericalangle SAD_2| = 36°.$$

Trojúhelník AD_2S je rovnoramenný a platí:

$$|AD_2| = |D_2S| = |AD_1| = a_{10}.$$

Dále jsou trojúhelníky AD_1S a D_1D_2A rovnoramenné a zároveň podobné, neboť se shodují ve velikostech všech vnitřních úhlů. Díky této podobnosti můžeme říci, že platí:

$$\frac{|SA|}{|AD_1|} = \frac{|AD_1|}{|D_1D_2|},$$

a po dosazení dostáváme

$$\frac{r}{a_{10}} = \frac{a_{10}}{r-a_{10}}.$$

Po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici ${a_{10}}^2 + r \cdot a_{10} - r^2 = 0$. Tato rovnice má dvě reálná řešení: $a_{10} = \pm\frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$, přičemž my hledáme pouze ta kladná, řešením je tedy pouze $a_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

Pak

$$|D_1C| = |CD_2| = \frac{r-a_{10}}{2} = \frac{r-\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)}{2} = \frac{r(3-\sqrt{5})}{4}.$$

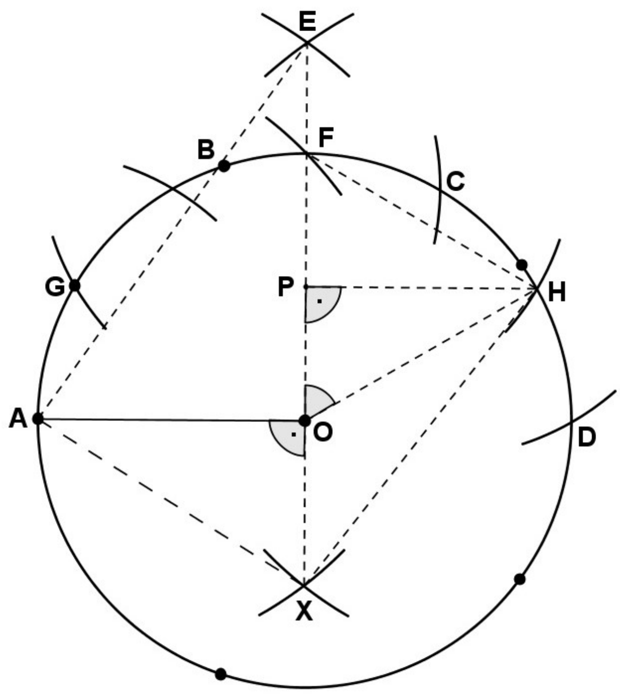
Trojúhelník AD_1C je pravoúhlý, proto můžeme použít Pythagorovu větu:

$$|AC| = \sqrt{|AD_1|^2 - |D_1C|^2} = \sqrt{\left(\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)\right)^2 - \left(\frac{r(3-\sqrt{5})}{4}\right)^2} = \frac{r}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

Nakonec $|AB| = 2 \cdot |AC| = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$

Důkaz.

Nyní se budeme snažit dokázat, že $|AX| = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$



Obrázek 20: Důkaz konstrukce pravidelného vepsaného pětiúhelníku

Využijeme pravoúhlého trojúhelníku *AXO*, ve kterém zatím známe jen délku úsečky AO, která je rovna poloměru r dané kružnice. Například z pravoúhlého trojúhelníku ADC můžeme dle Pythagorovy věty dopočítat délku strany AC následovně:

$$|AC| = \sqrt{|AD|^2 - |CD|^2} = \sqrt{(2r)^2 - r^2} = r\sqrt{3}.$$

Jelikož $|AC| = |AE|$, použijeme na pravoúhlý trojúhelník AOE opět Pythagorovu větu:

$$|OE| = \sqrt{|AE|^2 - |AO|^2} = \sqrt{\left(r\sqrt{3}\right)^2 - r^2} = r\sqrt{2}.$$

Z konstrukce víme, že

$$|OF| = |OH| = |FH| = r,$$

z čehož vyplývá, že trojúhelník FOH je rovnostranný. V tomto trojúhelníku pak patu výšky z vrcholu *H* na protější stranu označme *P*. V pravoúhlém trojúhelníku OHP využijeme Pythagorovu větu:

$$|HP| = \sqrt{|OH|^2 - |PO|^2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{r\sqrt{3}}{2}.$$

V pravoúhlém trojúhelníku *PXH* známe délku strany *HP* a *XH*, neboť $|XH| = |OE|$. Opětovným použitím Pythagorovy věty tak získáme:

$$|PX| = \sqrt{|XH|^2 - |HP|^2} = \sqrt{\left(r\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{r\sqrt{5}}{2}.$$

Snadno dopočteme velikost strany *XO*:

$$|XO| = |PX| - |PO| = \frac{r\sqrt{5}}{2} - \frac{r}{2} = \frac{r(\sqrt{5}-1)}{2}.$$

Konečně se vracíme zpět k pravoúhlému trojúhelníku AXO, ve kterém už známe délky dvou jeho stran, a znovu díky Pythagorově větě platí:

$$|AX| = \sqrt{|AO|^2 + |XO|^2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{r(\sqrt{5}-1)}{2}\right)^2} = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

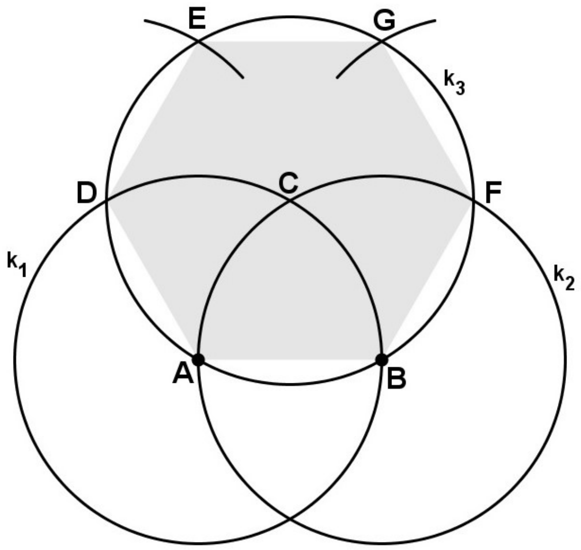
Podmínka tedy platí a sestrojený útvar je pravidelným vepsaným pětiúhelníkem.

4.3 Sestrojte pravidelný šestiúhelník.

a) Je dána délka jedné jeho strany.

Řešení.

Nechť jsou dány body *A* a *B*, které nám definují délku jedné strany šestiúhelníku. Nejprve sestrojíme kružnice se středy v bodech *A* a *B* o poloměru délky *AB*, označme je po řadě k_1, k_2. Jeden z jejich průsečíků označme *C*. Se středem v tomto bodě sestrojíme kružnici k_3 tak, aby procházela body *A* a *B*. Průsečíky s kružnicemi k_1 a k_2 označíme po řadě *D* a *F*. Dále sestrojíme kružnici se středem v bodě *D*, která protne kružnici k_3 v bodě *E*. Obdobně sestrojíme kružnici se středem v bodě *F*, která protne kružnici k_3 v bodě *G*. Body *ABFGED* tvoří vrcholy hledaného šestiúhelníku.



Obrázek 21: Konstrukce pravidelného šestiúhelníku

Důkaz.

Šestiúhelník je vepsán do kružnice k_3 o poloměru délky strany AB. Vrcholy A, B, F, G, E a D nám rozdělí šestiúhelník na šest stejně velkých rovnostranných trojúhelníků, čímž je důkaz zřejmý.

b) Je dána kružnice, do které má být vepsán.

Řešení.

Při řešení využijeme té znalosti, která nám říká, že délka strany pravidelného šestiúhelníku je rovna velikosti poloměru kružnice, do které je takový pravidelný šestiúhelník vepsán. Jediné úskalí tak může nastat v případě, že neznáme střed této kružnice. To však řeší jeden z Mascheroniho problémů.

Důkaz.

Důkaz je zřejmý, pokud víme, že strany vepsaného šestiúhelníku tvoří poloměry kružnice, viz příklad 4.3, a).

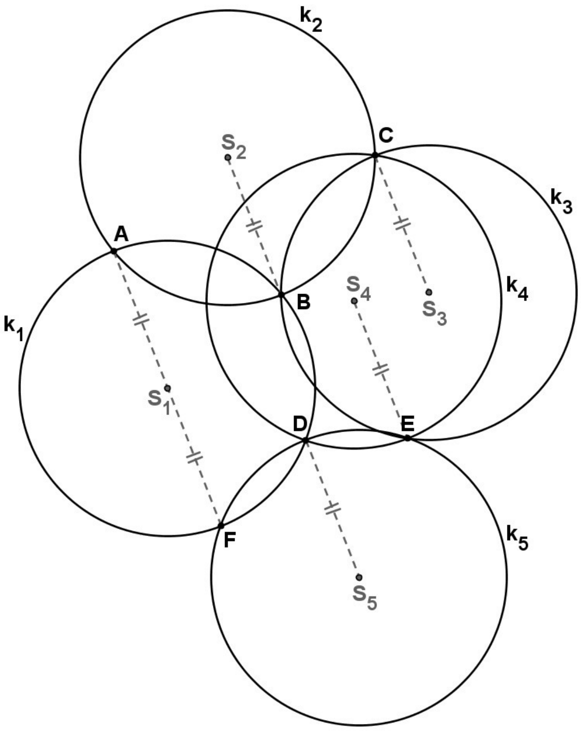
4.4 Nechť je dána libovolná kružnice a na ní bod A. Sestrojte pouze za pomoci této kružnice bod A' tak, aby byl obrazem bodu A ve středové souměrnosti se středem dané kružnice. Předpokládáme, že tento střed neznáme.

Pozn.

Úlohu lze studentům interpretovat tak, že vystřihneme z papíru libovolný kruh, který obkreslíme, a na jeho obvodu zvolíme bod A. Bod A' pak hledáme pouze za pomoci obkreslování tohoto kruhu.

Řešení.

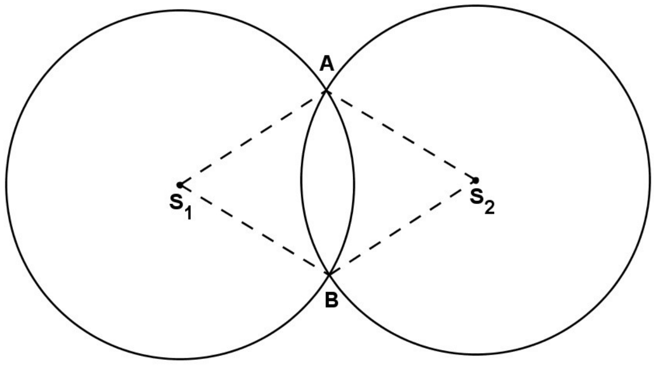
Pokud bychom znali střed kružnice, je konstrukce jednoduchá. Pouze naneseme na kružnicový oblouk třikrát poloměr dané kružnice. Bod A' je pak k bodu A protilehlým vrcholem vepsaného šestiúhelníku. Zajímavá je však konstrukce, ve které nevyužíváme středů kružnic. Označme první kružnici k_1, nyní narýsujeme kružnici k_2, která nám k_1 protne v bodech A a B. Dále narýsujeme kružnici k_3 procházející bodem B, druhý průsečík s k_2 označme C. Nyní sestrojíme kružnici k_4 tak, aby procházela bodem C, průsečík s k_1 označme D. Nakonec narýsujeme kružnici k_5, která prochází bodem D, druhý průsečík s k_4 označme E, průsečík s k_1 bodem F. Bod F je hledaným obrazem bodu A, tedy $F = A'$.



Obrázek 22: Středová souměrnost

Důkaz.

K tomuto důkazu využijeme následující vlastnost. Pokud se dvě kružnice se středy v bodech S_1 a S_2 o stejném poloměru protínají ve dvou bodech A a B, tvoří úsečky S_1A, AS_2, S_2B a BS_1 kosočtverec. Tudíž jsou protilehlé strany vzájemně rovnoběžné a všechny strany jsou stejně dlouhé.



Obrázek 23: Kosočtverec

Nyní přejděme k důkazu samotnému: označme středy kružnic k_1, k_2, k_3, k_4 a k_5 po řadě S_1, S_2, S_3, S_4 a S_5. Z předcházejícího poznatku víme, že AS_1 je stejně dlouhá a rovnoběžná s S_2B, stejně tak S_2B je stejně dlouhá a rovnoběžná s CS_3. Totéž platí pro CS_3 a S_4E, rovněž také pro S_4E a DS_5, a v neposlední řadě i pro dvojici DS_5 a S_1F. Všechny tyto úsečky jsou tak vzájemně rovnoběžné. Pokud tedy i AS_1 a S_1F mají být rovnoběžné, splývají přímky, na kterých leží, v jednu a jsou souhlasné. Dále víme, že jsou všechny úsečky stejně dlouhé, tedy bod F musí ležet na k_1 a je obrazem bodu A ve středové souměrnosti se středem S_1, tedy $F = A'$.

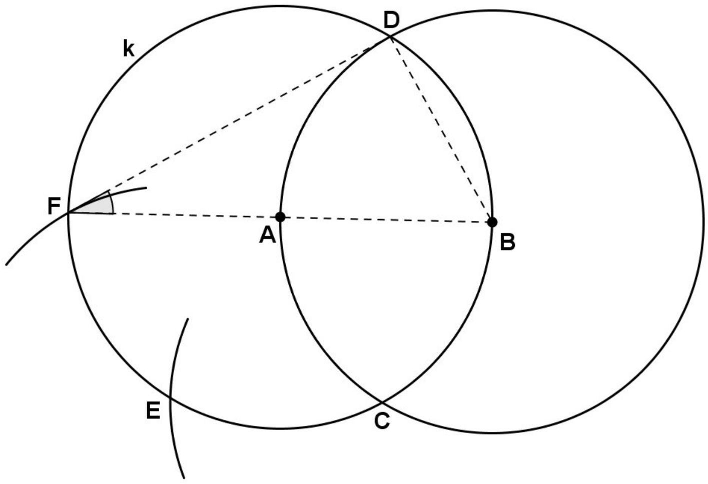
4.5 Sestrojte úhel o velikosti 30°.

Řešení:

Zvolme v rovině body A, B. Dále sestrojíme dvě kružnice se středy v bodech A (kružnice k) a B o poloměru AB. Průsečíky těchto kružnic označme body C, D. Dále sestrojíme kružnici se středem v bodě C o poloměru AB, její průsečík s kružnicí k označme E. Nakonec sestrojíme kružnici se středem v bodě D o poloměru AB. Průsečík s kružnicí k označme F. Vzniklý úhel AFD má hledanou velikost.

Pozn.

Jak je patrné z řešení konstrukce, je možné úhel $30°$ sestrojit pouze za pomoci pevného kružítka. Na začátku bychom jenom zvolili body *A*, *B* tak, aby jejich vzdálenost byla rovna právě poloměru pevného kružítka, což můžeme udělat tak, že nejprve sestrojíme jednu kružnici, její střed označíme *A* a libovolný bod náležící této kružnici označíme *B*.



Obrázek 24: Konstrukce úhlu o velikosti 30°

Důkaz.

Označme $|AB| = r$. Víme, že bod *F* leží na přímce *AB*, zároveň také platí, že trojúhelník *BDF* je pravoúhlý a to s pravým úhlem u vrcholu *D* (dle Thaletovy věty). $|FB| = 2r,\ |BD| = r$. Velikost úhlu *BFD* můžeme vypočítat pomocí funkce sinus následovně:

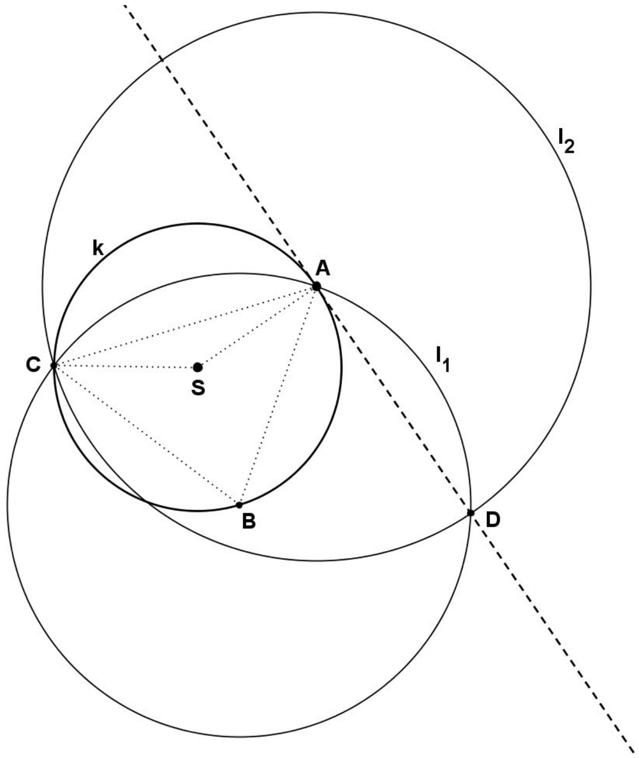
$$\sin(\sphericalangle BFD) = \frac{|BD|}{|BF|} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}.$$

Z toho vyplývá, že $|\sphericalangle BFD| = \frac{\pi}{6} = 30°$.

4.6 Na kružnici k se středem S leží bod A. Sestrojte v tomto bodě tečnu k dané kružnici.

Řešení.

Nejprve libovolně zvolíme na kružnici *k* bod *B*. Poté sestrojíme kružnici l_1 se středem v bodě *B*, která bude procházet bodem *A*. Průsečík této kružnice s kružnicí *k* označíme *C*. Nakonec sestrojíme kružnici l_2 se středem v bodě *A* procházející bodem *C*, druhý průsečík této kružnice s kružnicí l_1 označíme *D*. Body AD jednoznačně definují přímku, která je těžnicí k dané kružnici *k*.



Obrázek 25: Tečna ke kružnici

Důkaz.

Nechť $|\sphericalangle ASC| = 2\alpha$. Jelikož je trojúhelník SAC rovnoramenný, platí, že úhly při jeho základně jsou shodné neboli:

$$|\sphericalangle SAC| = |\sphericalangle ACS| = (180° - 2\alpha)/2 = 90° - \alpha.$$

Dále ze znalosti obvodového a středového úhlu víme, že $|\sphericalangle ABC| = \alpha$. I trojúhelník BAC je rovnoramenný se základnou AC, tedy obdobně platí:

$$|\sphericalangle BAC| = 90° - \alpha/2.$$

Z konstrukce také vidíme, že trojúhelníky BAC a ABD jsou shodné, protože se shodují ve všech třech stranách, proto platí, že $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BAD|$. Nakonec pak jenom dosadíme:

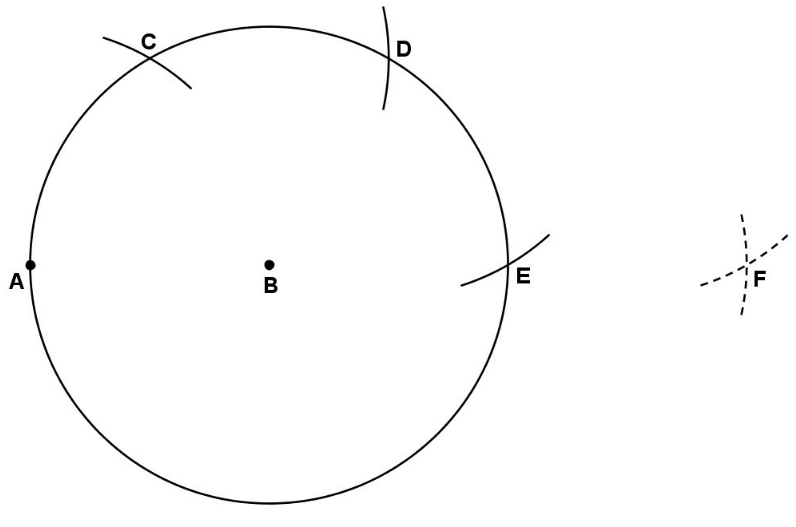
$$|\sphericalangle SAD| = |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle BAD| - |SAC| = 90° - \alpha/2 + 90° - \alpha/2 - 90° + \alpha = 90°.$$

Body AD tedy skutečně jednoznačně definují tečnu k dané kružnici.

4.7 Sestrojte úsečku, která bude mít dvakrát větší délku (třikrát, čtyřikrát, …) než zvolená úsečka AB.

Řešení.

Nejprve sestrojíme kružnici k se středem v bodě B procházející bodem A. Dále nanášíme na kružnici k kružnicové oblouky, postupně se středy v bodech A, C, D; průsečíky s kružnicí k označíme po řadě C, D, E. Úsečka AE má dvakrát větší délku než úsečka AB. Obdobně můžeme postupovat pro úsečku trojnásobné délky s tím rozdílem, že výchozí kružnice bude nyní se středem v bodě E procházející bodem B. Úsečka AF má pak trojnásobnou délku než AB. Podobně pak pro ostatní.



Obrázek 26: Úsečka dvojnásobné délky

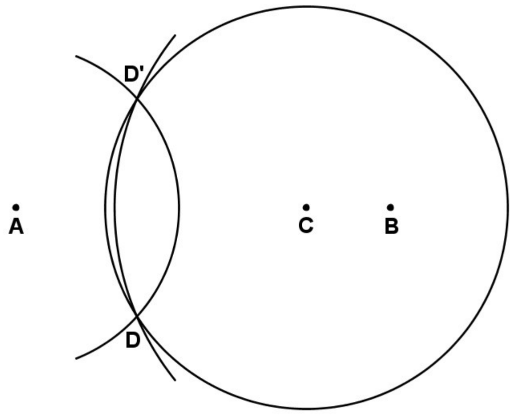
Důkaz.

Body A a E jsou protilehlé vrcholy vepsaného šestiúhelníku do kružnice k. Leží tedy v jedné přímce a jejich vzdálenost je rovna dvojnásobku poloměru kružnice AB. Obdobně pro další násobky.

4.8 V rovině jsou dány body A, B, C. Rozhodněte, zda jsou tyto body kolineární (neboli leží na jedné přímce).

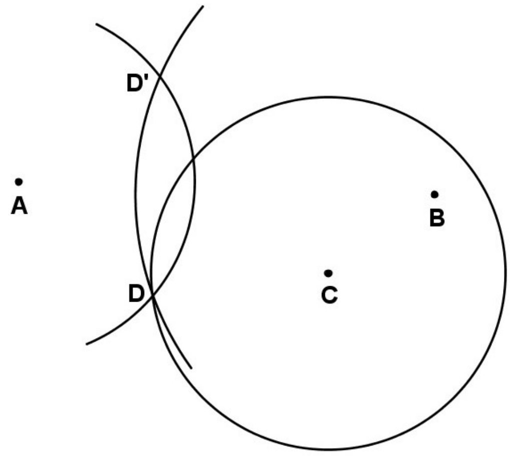
Řešení a zároveň důkaz.

Zvolme v rovině libovolný bod D tak, aby zcela jednoznačně neležel na přímce AB. Nyní narýsujeme kružnici se středem v bodě A, která bude procházet bodem D. Dále narýsujeme kružnici se středem v bodě B, která bude taktéž procházet bodem D, a jejich druhý průsečík označíme D'. Bod D' je obrazem bodu D v osové souměrnosti s osou AB. Pro všechny body přímky AB tak musí platit, že jsou od obou bodů D a D' stejně vzdálené. Pro bod C to pak jednoduše ověříme tak, že narýsujeme kružnici se středem v tomto bodě, která bude procházet bodem D. Pokud bude na této kružnici ležet i bod D', je bod C bodem přímky AB.



Obrázek 27: Tři kolineární body

Pokud body A, B, C nejsou kolineární, může tato situace vypadat například následovně:

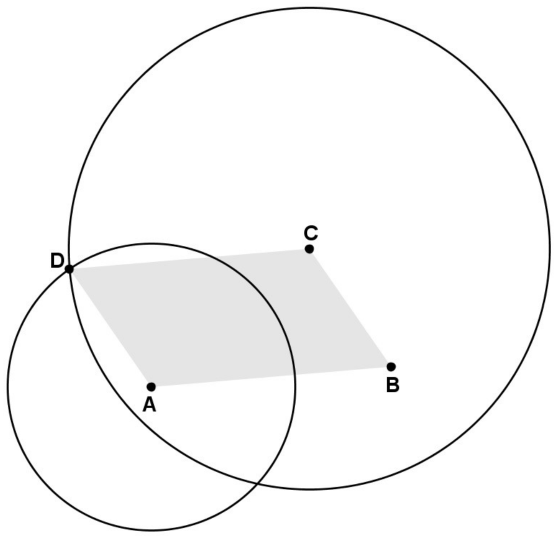


Obrázek 28: Tři nekolineární body

4.9 V rovině jsou dány tři nekolineární body A, B, C. Najděte bod D tak, aby $ABCD$ byl rovnoběžník.

Řešení.

Tato konstrukce je velice jednoduchá, skládá se pouze ze dvou kroků, nicméně jsem ji do této práce zařadila právě proto, že zvláště mladší žáci nejsou zvyklí pracovat s neurčitými objekty. Máme zde jen tři body, žádné úsečky, nesmějí je spojovat a jenom pomocí kružítka mají najít poslední hledaný bod. Je to tudíž vhodná úloha na formování představivosti, taktéž může být zajímavé, že jsme bez použití pravítka dokázali sestrojit rovnoběžnou přímku, jak už AD k BC nebo CD k AB. Nakonec je to pěkná ukázka rovnoběžníku a jeho vlastností. Konstrukce je zřejmá, využili jsme délek dvou stran.



Obrázek 29: Rovnoběžník

5 Závěr

Cílem této práce bylo podat ucelený přehled o Mascheroniho konstrukcích a najít další zajímavé způsoby a cesty, jak sestrojit dosud známé konstrukční úlohy s využitím právě pouze kružítka. Jsem přesvědčena o tom, že se mi tento cíl podařilo splnit.

V době, kdy jsem si toto téma vybrala, nebyla ještě v češtině taková práce zpracována, proto bylo obtížné najít dostatek zdrojů, ze kterých bych mohla čerpat. Většinou jsem tak využívala anglicky psaných učebnic, článků a textů. Při hledání řešení, která by obsahovala co nejmenší počet kroků, jsem s nadšením zjišťovala, že lidé po celém světě tvoří komunity a diskuzní fóra, kde tuto problematiku rozebírají a předbíhají se v lepších postupech a jasnějších důkazech.

V úvodu této práce jsem přislíbila, že budu důkazy stavět tak, aby byly co nejjednodušší. Často jsem tak k vysvětlení využívala spíše věty a souvětí, než značky a symboly, aby je mohl pochopit opravdu každý, kdo o ně vyjádří zájem.

Doufám, že tato práce bude sloužit nejen geometrickým nadšencům, ale také učitelům, kteří zde mohou najít spoustu zajímavých úloh, kterými mohou obohatit výuku. Dále může sloužit studentům, kteří se rádi v geometrii zamýšlejí. Znalostní úroveň této práce je v každém případě vhodná pro všechny středoškoláky, ale ani šikovný deváťák se v ní neztratí.

6 Zdroje

[1] COURANT, Richard a Herbert ROBBINS. *What is mathematics?*: an elementary approach to ideas and methods. 2nd ed. New York: Oxford University Press, 1996. ISBN 0-19-510519-2.

[2] MARTIN, George E. *Geometric Constructions*. New York: Springer-Verlag New York, 1998. ISBN 978-1-4612-6845-1.

[3] GARDNER, Martin. *Mathematical circus*: *more puzzles, games, paradoxes, and other mathematical entertainments from Scientific American*. Washington: Mathematical Association of America, 1992. MAA spectrum book. ISBN 0-88385-506-2.

[4] GRAHAM, Louis A. *The surprise attack in mathematical problems*. New York: Dover Publications, 2017. ISBN 978-0-486-21846-5.

[5] VYŠÍN, Jan. *Elementární geometrie*. I, (Planimetrie). Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. Knihovna.

[6] BRKOS TEAM. Konstrukční geometrie. *Brněnský korespondenční seminář* [online]. [cit. 2020-05-20]. Dostupné z http://brkos.math.muni.cz/index.php?s=zadani&t=povidani&u=223.

[7] *Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles* [online]. Alexander Bogomolny [cit. 2020-05-16]. Dostupné z: http://www.cut-the-knot.org/front.shtml.

[8] VAVÁČKOVÁ, Martina. *Konstrukce kružítkem* [online]. In: . s. 2 [cit. 2020-06-10]. Dostupné z: https://prase.cz/library/KonstrukceKruzitkemMV/KonstrukceKruzitkemMV.pdf.

[9] *Euclidea: The Largest Collection of Interactive Geometric Puzzles* [online]. [cit. 2019-06-09]. Dostupné z: https://www.euclidea.xyz/.

[10] *Lorenzo Mascheroni (1750-1800)*. [online] [cit. 2020-06-02]. Dostupné z http://mathematica.sns.it/autori/1351/.

[11] WIKIPEDIE. *Eukleidovy základy – Wikipedie: Otevřená encyklopedie* [online]. [cit. 2019-06-09]. Dostupné z: https://cs.m.wikipedia.org/wiki/Eukleidovy_Základy.

[12] REICHL, Jaroslav a Martin VŠETIČKA. *Neřešitelné matematické úlohy* [online]. [cit. 2019-06-09]. Dostupné z: http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/1438-neresitelne-matematicke-ulohy.

[13] O'CONNOR, J. J. a E. F. ROBERTSON. *Lorenzo Mascheroni* [online]. [cit. 2019-06-09]. Dostupné z: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Mascheroni/.

[14] O'CONNOR, J. J. a E. F. ROBERTSON. *Georg Mohr* [online]. [cit. 2019-06-09]. Dostupné z: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Mohr/.

[15] GUSEVA, Naděžda; IVAKINA, Anastasia a Marie CHODOROVÁ. *Kruhová inverze a její aplikace* [online]. [cit. 2019-06-09]. Dostupné z: http://mfi.upol.cz/files/25/2502/mfi_2502_084_089.pdf.

[16] TRIGG, Charles Wilderman. *Mathematical Quickies: 270 Stimulating Problems with Solutions*. New York: Dover Publications, 1985. ISBN 978-0486249490.

[17] CHENEY, Fitch Jr. Can We Outdo Mascheroni? *The Mathematics Teacher.* 1953, 46(3), 5. ISSN 00255769.

Vybraná diskuzní fóra na téma Mascheroniho konstrukcí

- *ocf.berkeley.edu*
- *community.wolfram.com*
- *forum.matematika.cz*
- *nctm.org*

7 Seznam obrázků

Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta M. Rettigové 4, 116 39 Praha 1

Evidenční list žadatelů o nahlédnutí do listinné podoby práce

Jsem si vědom/a, že závěrečná práce je autorským dílem a že informace získané nahlédnutím do zveřejněné závěrečné práce nemohou být použity k výdělečným účelům, ani nemohou být vydávány za studijní, vědeckou nebo jinou tvůrčí činnost jiné osoby než autora.

Byl/a jsem seznámen/a se skutečností, že si mohu pořizovat výpisy, opisy nebo rozmnoženiny závěrečné práce, jsem však povinen/povinna s nimi nakládat jako s autorským dílem a zachovávat pravidla uvedená v předchozím odstavci tohoto prohlášení.

Poř. č.	Datum	Jméno a příjmení	Adresa trvalého bydliště	Podpis
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				